МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ
І ТЕОРІЯ РЯДІВ

КУРС ЛЕКЦІЙ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 186 «Видавництво та поліграфія»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Вища математика. Елементи теорії поля і теорія рядів. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,12 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 155 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 5 від 25.01.2018 р.) за поданням Вченої ради ФМФ (протокол № 8 від 22.12.2017 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

І ТЕОРІЯ РЯДІВ

КУРС ЛЕКЦІЙ

Укладачі: *Кушлик-Дивульська Ольга Іванівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Поліщук Наталія Володимирівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Горбачук В. М.,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензенти: *Станжицький О. М.*, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Ординська З. П., канд. фіз.-мат. наук, доц.

Курс лекцій відповідає навчальній програмі дисципліни «Вища математика» спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія» підготовки студентів Видавничо-поліграфічного інституту. Наведено основні поняття, означення, формули, теореми теорії криволінійних, поверхневих інтегралів, елементів теорії поля. Подано теорію числових та функціональних рядів. Показано застосування теоретичного матеріалу до розв'язування практичних задач. Наявний перелік завдань для самостійного опрацювання. Додатки містять необхідний довідковий матеріал деяких тем курсу вищої математики.

Для студентів ВПІ КПІ ім. Ігоря Сікорського та інших факультетів, інститутів, які вивчають вищу математику.

Передмова

Теорія поля і теорія рядів – важливі розділи вищої математики, які широко використовуються в прикладних, інженерних, економічних задачах.

Мета цього навчального видання – допомогти студентам технічних спеціальностей у вивченні кредитного модуля «Вища математика 3», ознайомити з основними поняттями, теоремами теорії поля і рядів [1, 3], допомогти їм отримати необхідні знання з означених розділів, а також набути навички застосування теоретичних знань до розв'язання практичних задач.

Курс лекцій «Вища математика. Елементи теорії поля і теорії рядів» складений за робочою навчальною програмою відповідного кредитного модуля. Він є продовженням кредитних модулів «Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу» та «Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння», для яких наявна відповідна література [10], [11] (методичні вказівки до виконання розрахункових робіт), [12], [13], [14] (навчальні посібники, курс лекцій), що враховує специфіку підготовки для даної спеціальності. Навчальний посібник призначений для студентів денної та заочної форм навчання Видавничо-поліграфічного інституту, а також для студентів інших технічних, економічних спеціальностей та осіб, зацікавлених в вивченні цих розділів вищої математики.

Посібник складається з 9 лекцій, зміст кожної з них сформовано за відповідним планом. Достатньо і доступно викладено основний теоретичний матеріал, передбачений робочою навчальною програмою кредитного модуля для спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія». До кожної теми розв'язано приклади та задачі. Також після лекцій є завдання для самоконтролю, як теоретичного, так і практичного змісту, що підсилює ефективність опанування матеріалу студентом та його якісне засвоєння. Також наведені варіанти розрахункової роботи з зазначених тем.

Курс лекцій містить додаткові теми з теорії поля, а саме: диференціальні операції та їх застосування, поняття про вихрові шнури [18], особливі точки та їх дослідження. Посібник містить довідниковий матеріал попередньо вивчених тем курсу вищої математики.

Курс лекцій апробовано для студентів вказаної спеціальності Видавничо-поліграфічного інституту.

Автори дякують студентам технічних спеціальностей ВПІ, співробітникам кафедри математичної фізики ФМФ, кафедри репрографії ВПІ КПІ імені Ігоря Сікорського за спільну працю і підготовку навчального видання.

Автори вважають, що запропонований посібник буде корисний не тільки студентам технічних спеціальностей, але й магістрам, аспірантам, інженерам, зацікавленим в ознайомленні з цими темами вищої математики.

Частина І. Елементи теорії поля

Лекція 1. Криволінійні інтеграли 1-го та 2-го роду

1.1. Фізична задача, яка приводить до поняття криволінійного інтеграла 1-го роду. Означення криволінійного інтеграла 1-го роду.

1.2. Умови існування та обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду.

1.3. Задача про обчислення роботи змінної сили вздовж криволінійного шляху. Означення криволінійного інтеграла 2-го роду.

1.4. Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду.

1.5. Основні властивості криволінійних інтегралів.

Паралельно із розвитком інтегрального числення виникали узагальнення операції інтегрування. В 1743 р. Клеро ввів криволінійний інтеграл 2-го роду (книга «Теория фигуры Земли, основанная началом гидростатики», російський переклад вийшов в 1947р.). В 1770р. Ейлер, в зв'язку з розв'язуванням практичних задач, розробив і ввів подвійне інтегрування. Через 2 роки (1772р.) Лагранж, розглядаючи задачу притягання еліпсоїда обертання (1775р.), запропонував математичне вивчення потрійних інтегралів. Узагальненням визначеного інтеграла на випадок, коли областю інтегрування є деяка крива, вважають криволінійний інтеграл, який поділяють на два види: 1-го роду (вздовж кривої) та 2-го роду (за координатами).

1.1. Фізична задача, яка приводить до поняття криволінійного інтеграла 1-го роду. Означення криволінійного інтеграла 1-го роду

Нехай на площині XOY задана деяка матеріальна крива, вздовж якої розподілена маса. Якщо крива однорідна, тоді відношення маси цієї кривої до її довжини називають лінійною густиною і її записують формулою

$$\rho = \frac{m}{S},$$

де $m -$ маса однорідної кривої, а $S -$ її довжина.

Якщо крива неоднорідна, то густина в кожній точці цієї кривої буде різною і визначають середню густину в точці, взявши ділянку кривої, яка містить дану точку $M(x, y)$:

$$\rho(M) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} \text{ або } \rho(M) = \frac{dm}{dS}.$$

Проте, на практиці зустрічається частіше обернена задача: за відомою лінійною густиною $\rho = \rho(M)$, яка є неперервною функцією точки $M(x, y)$, знайти масу кривої.

Розбиваємо криву $\widehat{AB}$ (крива не перетинає сама себе) на n частин точками $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$.

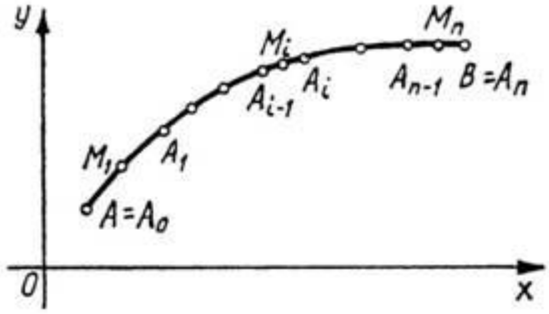

Рис.1.1. n-розбиття кривої.

Позначимо частину кривої, що знаходиться між точками A_i та A_{i+1} через $\widehat{A_i A_{i+1}}$, а довжину цієї частини ΔS_i $(i = 0,1, \dots, n-1)$. На кожній з таких частин виберемо довільним чином точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ і утворимо суму

$$\sum_{i=0}^{n-1} \rho(P_i)\Delta S_i = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i. \tag{1.1}$$

Сума (1.1) дає наближене значення маси кривої, і чим менша кожна дуга $\widehat{A_i A_{i+1}}$, тим побудована сума дає точніше значення маси даної кривої. Суму (1.1) називають інтегральною сумою функції $\rho = \rho(x, y)$ на кривій $\widehat{AB}$.

Тому, якщо позначити через

$$\lambda = \max_{0 \le i \le n-1} \{\Delta S_i\}$$

найбільшу довжину дуги кривої $\widehat{A_i A_{i+1}}$, то природно за масу кривої взяти

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \qquad (1.2)$$

Границя (1.2) називається *криволінійним інтегралом першого роду (або криволінійним інтегралом по довжині дуги)* від функції $\rho = \rho(x, y)$ по кривій $\widehat{AB}$.

Аналогічно, записуючи інтегральну суму [3] для кривої $\widehat{AB}$, параметричні рівняння якої

$$x = x(s), y = y(s), 0 \leq s \leq S,$$

де за параметр взято довжину дуги s, що пов'язує початкову точку $A(x(0), y(0))$ із змінною точкою $M(x(s), y(s))$ і для заданої на ній обмеженої функції $f(x, y)$, маємо інтегральну суму вигляду

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i, \quad \xi_i = x(\tau_i), \;\; \eta_i = y(\tau_i), \qquad (1.3)$$

яку називають інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ по кривій $\widehat{AB}$. Якщо при

$$\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{\Delta S_i\} \to 0$$

(1.3) має скінченну границю, яка не залежить від розбиття кривої $\widehat{AB}$ і від вибору точок $P_i(\xi_i, \eta_i)$, то цю границю називають *криволінійним інтегралом першого роду (або криволінійним інтегралом по довжині дуги)* від функції $f(x, y)$ по кривій $\widehat{AB}$ і позначають

$$\int_{AB} f(x, y) ds.$$

Отже, за означенням

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \qquad (1.4)$$

Якщо границя (1.4) існує, то функція $f(x, y)$ називається *інтегрованою* на кривій $\widehat{AB}$, крива $\widehat{AB}$ − *кривою інтегрування*, A, B −відповідно початкова та кінцева точки інтегрування.

1.2. Умови існування та обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна на кривій $\widehat{AB}$ (надалі розглядатимемо тільки такі функції). Тоді сума вигляду (1.3)

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x(\tau_i), y(\tau_i)\ )\Delta S_i \tag{1.5}$$

є інтегральна сума, побудована для неперервної функції однієї змінної

$$z(s) = f(x(s), y(s))$$

на відрізку $[0, S]$. Отже, існує границя суми (1.5) при $\lambda = \max_{0\leq i\leq n-1}\{\Delta S_i\} \to 0$, і ця границя дорівнює визначеному інтегралу

$$\int_0^S f\big(x(s), y(s)\big)ds.$$

Теорема. *Якщо функція $f(x,y)$ неперервна на кривій $\widehat{AB}$, яка задана рівняннями $x = x(s), y = y(s), 0 \leq s \leq S$, то криволінійний інтеграл першого роду від функції $f(x,y)$ по такій кривій існує і дорівнює*

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_0^S f\big(x(s), y(s)\big)ds. \tag{1.6}$$

Зауваження. Формула (1.6) дає змогу обчислити криволінійний інтеграл першого роду лише у випадку, коли крива задана параметричними рівняннями, де за параметр взято довжину кривої.

Обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду

Нехай крива задана параметричними рівняннями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \leq t \leq \beta\,,$$

де за параметр взято довільну величину t. За умови неперервності функцій $x = x(t), y = y(t)$ разом із похідними, крива є гладка, і довжина кривої $\widehat{AM}$, де $M -$ довільна точка на кривій, дорівнює

$$S = \int_\alpha^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt\,.$$

Зробивши заміну змінних у визначеному інтегралі формули (1.6), маємо таку формулу для обчислення криволінійного інтеграла

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt. \qquad (1.7)$$

Якщо крива задана в прямокутній системі координат рівнянням $y=\varphi(x),\ a\le x\le b$, функція $y=\varphi(x)$ є неперервною на вказаному відрізку разом із похідною $\varphi'(x)$, тоді (за параметр t беруть змінну x) інтеграл обчислюють за формулами

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\left(\varphi'(x)\right)^2}dx. \qquad (1.8)$$

Зауваження. Для кривої $x=\psi(y),\ c\le y\le d$ за умов неперервності функції $x=\psi(y)$ разом із похідною $\psi'(y)$ на відрізку $c\le y\le d$ має місце аналогічна формула

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{c}^{d} f(\psi(y),y)\sqrt{1+\left(\psi'(y)\right)^2}dy.$$

Якщо крива $\widehat{AB}$ задана рівнянням в полярній системі координат

$$\rho=\rho(\theta),\theta_1\le\theta\le\theta_2,$$

де функція $\rho(\theta)$ і її похідна $\rho'(\theta)-$ неперервні на вказаному відрізку, то криволінійний інтеграл 1-го роду обчислюють за формулою

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\left(\rho'(\theta)\right)^2}d\theta \qquad (1.9)$$

Зауваження. Можна означити і обчислювати криволінійний інтеграл 1-го роду від функції трьох змінних $f(x,y,z)$ на просторових кривих. Якщо просторова крива $\widehat{AB}$ задана параметричними рівняннями

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\alpha\le t\le\beta,$$

де функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, а також їх похідні $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ є неперервними на відрізку $[\alpha,\beta]$, а функція $f(x,y,z)$ неперервна в точках даної кривої, то криволінійний інтеграл 1-го роду від функції $f(x,y,z)$ по кривій $\widehat{AB}$ існує і обчислюється за формулою

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt. \qquad (1.10)$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду $\int\limits_{AB} xyds$, де AB є частиною еліпса $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \ \ t \in [0, \pi/2]. \end{cases}$

Розв'язування. Скористаємося формулою (1.7), маємо

$$\int\limits_{AB} xyds = \int\limits_{0}^{\pi/2} a\cos t\, b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt = \frac{ab}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(\left(a^2 - b^2\right)\sin^2 t + b^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\sin^2 t\right) =$$

$$= \frac{ab}{3\left(a^2 - b^2\right)}\left(\left(a^2 - b^2\right)\sin^2 t + b^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{ab\left(a^3 - b^3\right)}{3\left(a^2 - b^2\right)} = \frac{ab\left(a^2 + ab + b^2\right)}{a - b}.$$

1.3. Задача про обчислення роботи змінної сили вздовж криволінійного шляху. Означення криволінійного інтеграла 2-го роду

Якщо на точку M діє стала сила F і точка під дією цієї сили рухається прямолінійно, то, робота, виконана даною силою, дорівнює

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS\cos\theta, \qquad (1.11)$$

де S —шлях, пройдений точкою, а θ — кут, що його утворює вектор сили $\vec{F}$ із вектором-переміщенням $\vec{S}$. Але, якщо на точку діє змінна сила і точка рухається вздовж кривої, то застосовувати формулу (1.11) для обчислення роботи не можна. У цьому випадку треба застосувати граничний перехід, внаслідок якого приходять до поняття криволінійного інтеграла 2-го роду.

Нехай під дією змінної сили $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ точка $M(x, y)$ на площині XOY описує деяку криву $\widehat{AB}$. Потрібно обчислити роботу [1], виконану силою $\vec{F}$ при переміщенні точки M вздовж плоскої кривої від точки A до точки B.

Розбиваємо криву $\widehat{AB}$ на n довільних частинних кривих (дуг) точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$. Ці точки з'єднуємо відрізками прямої лінії і в криву $\widehat{AB}$ буде тоді вписано ламану лінію. Вважають, що на кожній частинній кривій точка

M рухається не вздовж кривої, а вздовж відрізка прямої $A_{i-1}A_i$ під дією сталої сили $\vec{F} = \vec{F}(\xi_i, \eta_i)$, де (ξ_i, η_i) – довільна точка на кривій $A_{i-1}A_i$.

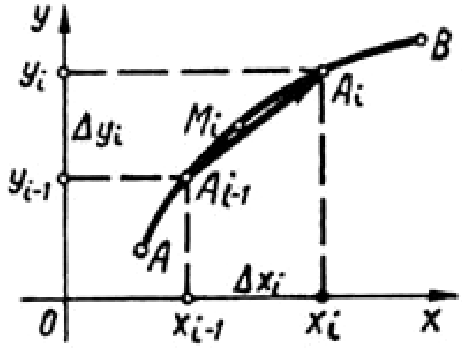

Рис. 1.2. Фрагмент елемента дуги.

Нехай проекції вектора-переміщення $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на координатні осі є $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, а проекції вектора сили $\vec{F_i}$ – відповідно $P(\xi_i, \eta_i)$, $Q(\xi_i, \eta_i)$. Тоді робота W_i, виконана силою $\vec{F_i} = \vec{F_i}(\xi_i, \eta_i)$ при переміщенні точки вздовж відрізка прямої $A_{i-1}A_i$

$$W_i = \vec{F_i}(\xi_i, \eta_i) \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$$

і, відповідно, робота W, виконана силою вздовж ламаної лінії, вписаної в криву $\widehat{AB}$, дорівнює

$$W = \sum_{i=1}^{n} (P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i).$$

В позначенні $\lambda = \max_{i=1,\dots,n}\{|\Delta x_i|, |\Delta y_i|\}$ границю

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i \right)$$

називають *криволінійним інтегралом 2-го роду* і позначають символом

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i) = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (1.11)$$

Отже, задача про обчислення роботи змінної сили вздовж кривої зводиться до обчислення криволінійного інтеграла другого роду.

Означення криволінійного інтеграла другого роду (за координатами)

Нехай функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні в точках дуги AB гладкої кривої $K,$ що задається рівнянням $y=\varphi(x)$ $(a \le x \le b)$.

Означення. *Інтегральною сумою* для функцій $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ *за координатами* називається сума вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\left(P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\right),$$

де $\Delta x_i, \Delta y_i -$ проекції відповідної дуги на осі OX, OY.

Означення. *Криволінійним інтегралом за координатами* (або криволінійним інтегралом 2-го роду) від виразу $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ вздовж напрямленої дуги AB називається границя інтегральної суми за умови, що $\max \Delta x_i \to 0$ і $\max \Delta y_i \to 0$:

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i -$$

криволінійний інтеграл за координатою x;

$$\int_{AB} Q(x, y)dy = \lim_{\max \Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i -$$

криволінійний інтеграл за координатою y;

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)dy - \qquad (1.12)$$

повний криволінійний інтеграл.

Отже, якщо кожен із інтегралів $\int_{AB} P(x,y)dx$ та $\int_{AB} Q(x, y)dy$ існує, то справджується рівність (1.12).

Якщо крива L замкнена, то інтеграл має вигляд

$$\oint_L P\left(x,y\right)dx + Q\left(x,y\right)dy ,$$

його називають *циркуляцією.*

1.4. Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду

Будемо розглядати гладкі криві.

Означення. Криву будемо називати *гладкою,* якщо функції, які її описують неперервні і мають неперервні похідні. Криву будемо називати *кусково-гладкою*, якщо вона складається з скінченного числа гладких кривих.

Теорема. *Якщо крива AB задана параметричними рівняннями, функції $x(t)$, $y(t)$ та їх похідні першого порядку $x'(t)$, $y'(t)$ є неперервними на відрізку $[\alpha, \beta]$, а функція $f(x, y,)$ неперервна вздовж даної кривої, то криволінійні інтеграли другого роду*

$$\int_{AB} f(x,y)dx, \quad \int_{AB} f(x,y)dy$$

існують і виражаються через визначені інтеграли такими рівностями

$$\int_{AB} f(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))x'(t)dt, \tag{1.13}$$

$$\int_{AB} f(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))y'(t)dt. \tag{1.14}$$

При цьому будемо вважати, що точці A відповідає значення параметра $t = \alpha$, а точці $B -$ значення параметра $t = \beta$.

Наслідок теореми. В умовах теореми для неперервних функцій $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ вздовж кривої $\widehat{AB}$ існує криволінійний інтеграл другого роду $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, який дорівнює

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\big)dt. \tag{1.15}$$

Формула (1.15) спрощується, якщо плоска крива $\widehat{AB}$ задана явним рівнянням $y = \varphi(x), a \le x \le b$, де $\varphi(x) -$ неперервно-диференційовна функція на проміжку $[a, b]$. Тоді, взявши за параметр $t = x$, формула обчислення інтеграла набуде вигляду

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{a}^{b} \big(P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x)\big)dx, \tag{1.16}$$

при цьому точка A має координати $(a, \varphi(a))$, $B(b, \varphi(b))$.

Аналогічно, якщо криву задано рівнянням $x = \psi(y), c \le y \le d$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{c}^{d} \left(P(\psi(y), y)\psi'(y) + Q(\psi(y), y) \right) dy, \qquad (1.17)$$

при цьому координати точок $A(\psi(c), c)$, $B(\psi(d), d)$.

Зауваження. Обчислюють криволінійний інтеграл 2-го роду від неперервних функцій трьох змінних $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ вздовж параметрично заданої кривої $\overset{\frown}{AB}$

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \le t \le \beta,$$

де функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, а також їх похідні $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ є неперервними на відрізку $[\alpha, \beta]$:

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x(t), y(t), z(t)\big) x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big) y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big) z'(t) \Big) dt.$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{\Delta OAB} xy\,dx + (x + y)\,dy$ по периметру ΔOAB проти годинникової стрілки, де $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$.

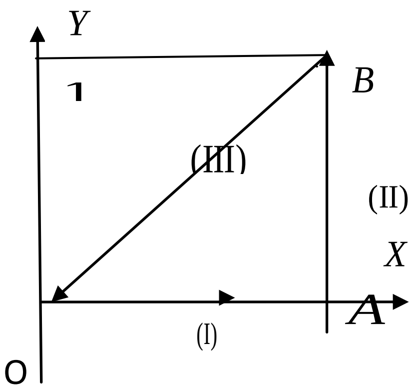

Рис.1.3. Інтегрування по ламаних.

Розв'язування. Розіб'ємо контур на три відрізка OA, AB, BO.

1) OA: $y = 0$, $x \in [0,1]$, $dy = 0$. З формули (1.16) маємо:

$$I_1 = \int_0^1 \left(x \cdot 0 + (x+0)0 \right) dx = 0 .$$

2) AB: $x=1,\ y \in [0,1],\ dx = 0$. З формули (1.17) маємо:

$$I_2 = \int_0^1 \left(1 \cdot y \cdot 0 + (1+y) \right) dy = \left. \frac{(1+y)^2}{2} \right|_0^1 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} .$$

3) BO: $y = x,\ x:\ 1 \to 0,\ dy = dx$.

$$I_3 = \int_1^0 \left(x^2 + 2x \right) dx = \left. \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \right|_1^0 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}, \quad I = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}.$$

1.5. Основні властивості криволінійних інтегралів

Деякі властивості криволінійного інтеграла 1-го роду

1) Криволінійний інтеграл 1-го роду не залежить від напрямку шляху інтегрування

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{BA} f(x, y) ds.$$

2) Криволінійний інтеграл 1-го роду має властивість лінійності

$$\int_K \left[f_1(x, y) \pm f_2(x, y) \right] ds = \int_K f_1(x, y) ds \pm \int_K f_2(x, y) ds,$$

$$\int_K C f(x, y) ds = C \int_K f(x, y) ds, \quad C = const.$$

3) Якщо криву інтегрування K розбито на дві частини K_1 і K_2, то

$$\int_K f(x, y) ds = \int_{K_1} f(x, y) ds + \int_{K_2} f(x, y) ds.$$

Деякі властивості криволінійного інтеграла 2-го роду

1) Криволінійний інтеграл 2-роду змінює свій знак на протилежний при зміні напрямку шляху інтегрування

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy.$$

2) $\displaystyle\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} Pdx + \int_{AB} Qdy.$

Решта властивостей аналогічні властивостям криволінійного інтеграла першого роду [5].

Завдання для самоконтролю

1. Пояснити фізичну задачу обчислення маси неоднорідної дуги кривої із застосуванням криволінійного інтеграла 1-го роду.
2. Означити криволінійний інтеграл 1-го роду, записати його основні властивості.
3. Записати формули обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду (для різних видів задання кривої).
4. Обчислення роботи змінної сили вздовж криволінійного шляху за допомогою криволінійного інтеграла 2-го роду.
5. Дати означення криволінійного інтеграла за координатами, навести основні властивості, пояснити відмінність від криволінійного інтеграла 1-го роду.
6. Записати основні формули обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду.
7. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L xyds,$ де $L-$ контур прямокутника зі сторонами $x=\pm 1,\ y=\pm 2.$
8. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy;\quad L=AB$ – лінія $y=x^2$ від точки $A(-1,1)$ до точки $B(2,4).$
9. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\oint\limits_L (x^2+y^2)^2 ds;\quad L-$ коло $x^2+y^2=4.$
10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L 2xydx+y^2dy+z^2dz;\quad L=AB$ – відрізок прямої, де точки $A(1,1,2),\ B(2,3,8).$

11. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \frac{z^2 ds}{x^2+y^2}$, де L – перший виток гвинтової лінії $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=at$.

12. Обчислити роботу сили $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+2y\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки з початку координат в точку (1,-4) по параболі $y=-4x^2$.

13. Знайти масу 1-го витка гвинтової лінії $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=at$, якщо густина її дорівнює квадрату полярного радіуса в кожній точці.

14. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L (x-y)^2\,dx+(x+y)^2\,dy$, де L – контур трикутника ABO з вершинами $A(2,0)$, $B(4,2)$, $O(0,0)$.

15. Обчислити роботу силового поля $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж верхньої половини еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ від точки $A(a,0)$ в точку $B(-a,\,0)$.

16. Обчислити роботу сили $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}$ вздовж кола $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ у від’ємному напрямі.

17. Обчислити циркуляцію вектора $\vec{F}=y\vec{i}-z\vec{j}+x\vec{k}$ вздовж еліпса $\frac{x^2+y^2}{2}+z^2=a^2,\ \ x=y$ в додатному напрямі орта $\vec{i}$.

Лекція 2. Застосування криволінійних інтегралів

2.1. Формула Гріна.

2.2. Незалежність криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування.

2.3. Геометричні та фізичні застосування криволінійних інтегралів 1-го та 2-го роду.

2.4. Знаходження функції за її повним диференціалом.

2.1. Формула Гріна

Джорж Грін (1793-1841рр.) – англійський математик і фізик. Ця формула пов'язує подвійний інтеграл по області і криволінійний інтеграл по границі області.

Будемо розглядати однозв'язні плоскі області G, тобто області без «дірок». Область будемо називати *однозв'язною,* якщо будь-який замкнений контур, який належить області, можна стягнути в точку, яка теж належить області.

Теорема 1 (Гріна). *Якщо функції* $P(x, y), Q(x, y)$ *неперервні і мають неперервні частинні похідні в замкненій однозв'язній області* G*, що лежить в площині* OXY *і обмежена кусково-гладкою кривою* L*, то*

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \tag{2.1}$$

де інтегрування по контуру L *виконується в додатному напрямку його обходу.*

Формула (2.1) називається *формулою Гріна.*

Доведення теореми.

1. Розглянемо область G, яка є правильною областю в напрямку осі OY, тобто (рис. 2.1) $G-$ криволінійна трапеція: $a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),$ де $\varphi_1(x), \varphi_2(x) -$ неперервні на $[a;b]$ функції, L – контур (межа) області G і напрям обходу L вибрано так, що область G залишається зліва.

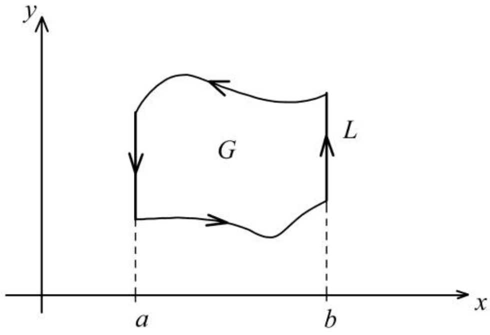

Рис. 2.1. Правильна область в напрямку осі OY.

Нехай $P(x,y),\ \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} \in C(G)$. Доведемо виконання рівності

$$\oint_L Pdx = -\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy\,. \tag{2.2}$$

Обчислимо

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy\,.$$

Для кожного фіксованого $x \in [a;b]$ величина $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ визначається як похідна за змінною y функції однієї змінної при $x = const.$ Тому для кожного значення x можна використати формулу Ньютона-Лейбніца, за якою

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy = P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x)).$$

Тоді

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx\Big(P\big(x,\varphi_2(x)\big) - P\big(x,\varphi_1(x)\big)\Big) = \int_a^b P\big(x,\varphi_2(x)\big)dx - \int_a^b P\big(x,\varphi_1(x)\big)dx\,.$$

Розіб'ємо криву L на 4 криві.

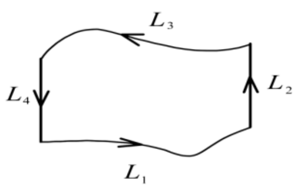

Рис. 2.2. Розбиття кривої.

Тоді

$$\int_{L_2} Pdx = 0, \int_{L_4} Pdx = 0.$$

Також

$$\int_{L_1} P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x,\varphi_1(x))\,dx, \quad \int_{L_3} P(x,y)\,dx = -\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx.$$

Отже,

$$\oint_L Pdx = \int_{L_1} Pdx + \int_{L_2} Pdx + \int_{L_3} Pdx + \int_{L_4} Pdx = -\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx +$$

$$+\int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx = -\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy.$$

2. Аналогічно для області *G*, яка є правильною областю в напрямку осі OX, тобто (рис. 2.3) криволінійної трапеції: $c \le y \le d$, $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, де $\psi_1(y), \psi_2(y)$ − неперервні на $[c;d]$ функції, L − межа *G*, а напрямок обходу L вибрано так, що *G* залишається зліва, функція $Q(x,y), \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \in C(G)$

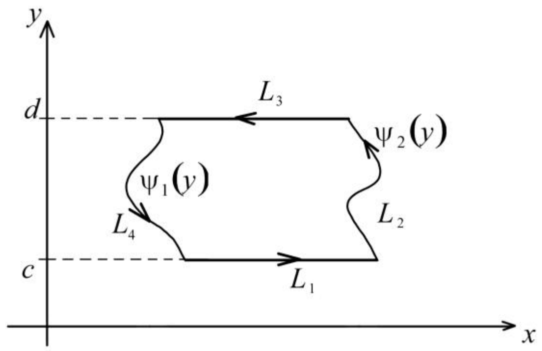

Рис. 2.3. Правильна область в напрямку осі OX.

доводять виконання рівності

$$\oint_L Qdy = \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy. \tag{2.3}$$

Додавши до рівності (2.3) рівність (2.2), отримаємо

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy,$$

що і доводить формулу Гріна.

Отже, формула Гріна встановлює зв'язок між подвійним інтегралом і криволінійним інтегралом 2-го роду:

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy.$$

Зауваження. Поклавши в формулі (2.1) $Q(x, y) = x,\ \ P(x, y) = -y$, маємо $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1,\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$, тобто $\iint_G (1+1)dxdy = \int_L xdy - ydx$, з якої отримуємо формулу обчислення площі плоскої фігури

$$S = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx. \tag{2.4}$$

2.2. Незалежність криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування

Криволінійний інтеграл другого роду залежить від напряму шляху інтегрування і при зміні цього напряму змінює свій знак (змінюються знаки $\Delta x_i, \Delta y_i$ в інтегральних сумах).

Розглянемо умови про рівність нулеві криволінійного інтеграла 2-го роду по замкненому контуру в умовах теореми Гріна $[7]$.

Теорема 2. *Якщо функції* $P(x, y), Q(x, y)$ *неперервні і мають неперервні частинні похідні в замкненій однозв'язній області* G, *що лежить в площині* OXY. *Тоді, для того щоб*

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0, \tag{2.5}$$

по будь-якому замкненому контуру L, *який лежить в області* G, *необхідно і достатньо виконання рівності*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2.6}$$

Доведення.

Необхідність. Нехай виконується рівність (2.5), де L – будь-який замкнений контур, що лежить в області G. Доведемо від супротивного. Припустимо, що рівність (2.5) виконується, а умова (2.6) не виконується хоча би в одній точці, тобто $\frac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial x}\neq 0$ в точці $M_0(x_0,y_0)\in G$. Нехай $\frac{\partial(Qx_0,y_0)}{\partial x}-\frac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial y}>0$ в точці M_0. Оскільки значення $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ є неперервною функцією в області *G*, то це означає, що вираз $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ буде додатнім також і в деякому достатньому малому околі точки $M_0(x_0,y_0)$, тобто області $D\subset G$:

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}>c>0. \tag{2.7}$$

Тоді візьмемо в області D замкнений гладкий контур *K*, що охоплює деяку область D_1, якій належить точка $M_0(x_0,y_0)$. Для області D_1 і контура *K* можна застосувати формулу Гріна

$$\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy=\oint_K P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

причому за нерівністю (2.7)

$$\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy>c\iint_{D_1}dxdy=cS,$$

де $S-$ площа області D_1. Отже, наше припущення неправильне, тобто $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\forall(x,y)\in G.$

Достатність. Нехай $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ і потрібно довести, що $\oint_L Pdx+Qdy=0,$ Візьмемо довільний контур *L*, що обмежує область $D\subset G$, тоді за формулою Гріна

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

Теорему доведено.

Як наслідок із теореми випливає наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай функції* $P(x, y), Q(x, y)$ *неперервні і мають неперервні частинні похідні* $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ *в замкненій однозв'язній області* G*, що лежить в площині* OXY*. Тоді, для того щоб криволінійний інтеграл*

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

не залежав від шляху інтегрування, який лежить в області G*, необхідно і достатньо виконання рівності (2.6).*

Зауваження. З практичної точки зору теорема дозволяє спрощувати обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду від точки до точки вздовж ламаних ліній, які є паралельними до осей координат.

2.3. Геометричні та фізичні застосування криволінійних інтегралів 1-го та 2-го роду

1. Нехай у площині XOY задано кусково-гладку криву $\widehat{AB}$, на якій визначено неперервну функцію $f(x, y)$. Якщо $f(x, y) = 1$, тоді *довжину* L кривої $\widehat{AB}$ визначають за формулою

$$L = \int_{AB} ds.$$

2. Якщо $f(x, y) \geq 0,$ то криволінійний інтеграл 1-го роду $\int_{AB} f(x, y)ds$ є *площею частини циліндричної поверхні*, яка визначена і обмежена зверху функцією $z = f(x, y)$, а знизу – проекцією цієї циліндричної поверхні на площину XOY.

3. *Обчислення площі плоскої фігури* (наслідок формули Гріна)

$$S = \frac{1}{2}\int_{L} xdy - ydx.$$

4. Якщо $f(x, y) > 0,$ то криволінійний інтеграл 1-го роду $\int_{K} f(x, y)ds$ є *масою кривої* K зі змінною лінійною густиною $\gamma = f(x, y)$, тобто

$$m = \int_K f(x, y)ds.$$

5. Обчислення *координат центра мас* кривої K зі змінною лінійною густиною $f(x, y)$

$$x_c = \frac{\int_K xf(x,y)ds}{\int_K f(x,y)ds} = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{\int_K yf(x,y)ds}{\int_K f(x,y)ds} = \frac{M_x}{m},$$

де $M_y, M_x -$ статичні моменти кривої відносно координатних осей OY, OX.

6. *Моменти інерції* I_x, I_y, I_O кривої відносно координатних осей OY, OX та початку координат відповідно дорівнюють

$$I_x = \int_K y^2 f(x,y)ds; \; I_y = \int_K x^2 f(x,y)ds; \; I_O = \int_K (x^2 + y^2) f(x,y)ds.$$

7. *Обчислення роботи*. Нехай сила $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ виконує роботу A при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої K, причому функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ неперервні на цій кривій, тоді

$$A = \int_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

8. *Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду.* Позначимо через α та β кути, які утворює з осями координат дотична до кривої AB у точці $M(x,y)$, за додатний напрям дотичної оберемо той, що відповідає рухові точки по кривій від A до B. Враховуючи геометричний зміст диференціала та диференціала дуги, маємо

$$dx = \cos\alpha ds, \;\; dy = \cos\beta ds.$$

Тоді можна записати криволінійні інтеграли за координатами, як

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{AB} P(x,y)\cos\alpha ds,$$

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{AB} Q(x,y)\cos\beta ds,$$

тобто

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} P(x,y)\cos\alpha ds + Q(x,y)\cos\beta ds.$$

При зміні напряму руху точки по кривій формули не змінюються, оскільки при цьому змінюють знак $dx, dy, \cos\alpha, \cos\beta$.

9. *Обчислення сили, з якою матеріальна крива притягує матеріальну точку.*

Нехай маємо дві матеріальні точки M та M_0, маси яких відповідно є m і m_0, а відстань між цими точками дорівнює r. За законом Ньютона сила $\vec{F}$, з якою точка M притягує точку M_0, дорівнює

$$\vec{F} = k\frac{m_0 m}{r^2}\vec{r}_0,$$

де $k-$ коефіцієнт пропорційності, що залежить від одиниць виміру (можна припустити, що $k = 1$), $\vec{r}_0$ $-$орт вектора $\overrightarrow{M_0 M}$.

Оберемо систему координат XOY. Розглянемо гладку криву $\widehat{AB}$, вздовж якої суцільно розповсюджена маса. Нехай відомо лінійну густину цієї кривої як функцію точки $\rho = \rho(M) = \rho(x, y)$. Розглядаємо n-розбиття кривої $\widehat{AB}$ і на кривій $\widehat{A_k A_{k+1}}$ довільну точку $C_k(x_k, y_k)$. Тоді можна вважати, що маса кривої $\widehat{A_k A_{k+1}}$ зосереджена в точці $C_k(x_k, y_k)$ і наближено дорівнює $\rho(x_k, y_k)\ \Delta s_k$, де Δs_k $-$довжина кривої $\widehat{A_k A_{k+1}}$.

Сила $\vec{F}_k$, з якою точка C_k притягує точку $O(0,0)$, дорівнює

$$\overrightarrow{F_k} = \frac{m_0 \rho(x_k, y_k)\Delta s_k}{r_k^2}\,\vec{r}_0^{\,k},$$

де $\vec{r}_0^{\,k}$ $-$ орт вектора $\vec{r}_k = (x_k, y_k)$.

Нехай вектор $\overrightarrow{F_k}$ утворює з додатним напрямом осі OX кут θ_k. Тоді проекції X_k, Y_k цієї сили на координатні осі дорівнюють

$$X_k = \frac{m_0 \rho(x_k, y_k)\ \Delta s_k}{r_k^2}\cos\theta_k,$$

$$Y_k = \frac{m_0 \rho(x_k, y_k)\ \Delta s_k}{r_k^2}\sin\theta_k. \qquad (2.8)$$

Якщо тепер на кожній кривій $\widehat{A_0 A_1}$, $\widehat{A_1 A_2}$, …, $\widehat{A_{n-1} B}$ вибрати довільно точки $C_0(x_0, y_0)$, $C_1(x_1, y_1)$, …, $C_{n-1}(x_n, y_n)$, то за формулами (2.8) можна записати проекції сил на координатні осі, якими дані точки притягують точку M_0. Проекції рівнодійної сили дорівнюватимуть алгебраїчній сумі проекції кожної сили зокрема, тобто у відповідних позначеннях проекцій на координатні осі маємо такі рівності:

$$X = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_0 \rho(x_k, y_k)\, \Delta s_k}{r_k^2} \cos\theta_k,$$

$$Y = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_0 \rho(x_k, y_k)\, \Delta s_k}{r_k^2} \sin\theta_k. \tag{2.9}$$

Якщо в рівностях (2.9) перейти до границі при $\lambda = \max_{0 \le k \le n-1} \Delta s_k \to 0$, то дістанемо криволінійні інтеграли першого роду

$$X = m_0 \int\limits_{\widehat{AB}} \frac{\rho(x, y) \cos\theta}{r^2} ds,$$

$$Y = m_0 \int\limits_{\widehat{AB}} \frac{\rho(x, y) \sin\theta}{r^2} ds. \tag{2.10}$$

За формулами (2.10) і обчислюють проекції на координатні осі OX та OY сили, з якою матеріальна дуга $\widehat{AB}$ притягує до себе матеріальну точку $O(0,0)$.

2.4. Знаходження функції за її повним диференціалом

Теорема 4. *Нехай функції* $P(x, y), Q(x, y)$ *неперервні і мають неперервні частинні похідні* $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ *в замкненій однозв'язній області* G, *що лежить в площині* OXY. *Тоді наступні чотири умови еквівалентні, тобто виконання однієї з умов дає виконання останніх трьох.*

1) Для довільної замкненої кусково-гладкої кривої, що належить області G

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0.$$

2) Для довільних двох точок M та N області G *значення інтеграла*

$$\int\limits_{MN} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

не залежить від форми шляху інтегрування, який лежить в області G.

3) Вираз $Pdx+Qdy$ *є повним диференціалом деякої функції, визначеної в області* G*, тобто існує така функція* $F(x, y)$*, визначена в області* G*, що*

$$dF = Pdx + Qdy.$$

4) В усіх точках області G *виконується рівність*

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Покажемо, що із пункту 3) випливає 4). Отже, нехай вираз $Pdx+Qdy$ є повним диференціалом деякої функції, визначеної в області G, тобто існує така функція $F(x, y)$, визначена в області G, що $dF = Pdx + Qdy.$ За означенням диференціала $\frac{\partial F}{\partial x} = P, \frac{\partial F}{\partial y} = Q$ і $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; оскільки за умовою теореми $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ – неперервні функції, то за теоремою про рівність мішаних похідних

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$

а це означає, що $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Довести самостійно, що із 2 випливає 3).

Розглянемо спосіб знаходження первісної. Зафіксуємо точку $M_0(x_0, y_0)$ в умовах теореми функцію

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy. \tag{2.11}$$

Тоді повний диференціал цієї функції $dF = Pdx + Qdy.$ Оскільки функція $F(x, y)$ – первісна, то

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy = u(x, y) + C.$$

Поклавши $x = x_0$, $y = y_0$, дістанемо $C = u(x_0, y_0)$, тому

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = u(x,y) - u(x_0, y_0). \tag{2.12}$$

Якщо $x = x_1$, $y = y_1$,то

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0). \tag{2.13}$$

Формулу (2.13) називають *формулою Ньютона-Лейбніца для криволінійного інтеграла від повного диференціала*. Вона дає спосіб знаходження первісної.

Оскільки криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, то для знаходження первісної вибирають ламану лінію (рис. 2.4) від точки $M_0(x_0, y_0)$ до $M(x, y)$, сторони якої паралельні до осей координат, тобто вздовж M_0PM, $P(x, y_0)$ (або M_0NM, $N(x_0, y)$).

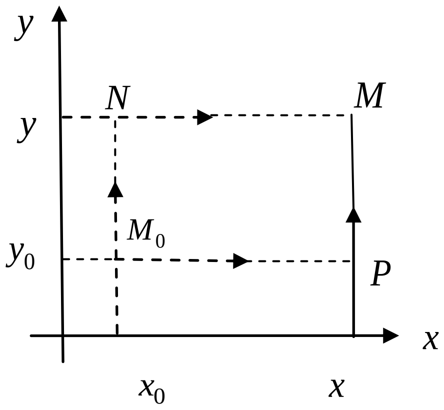

Рис. 2.4. Інтегрування по ламаних.

На відрізку M_0P маємо $y = y_0$, $dy = 0$, а на відрізку PM : $x = \text{const}, dx = 0$, тому із формули (2.12) маємо

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C. \tag{2.14}$$

Для ламаної M_0NM отримують

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C. \tag{2.15}$$

Формули (2.14, (2.15) дають змогу знайти первісну. Початкову точку $M_0(x_0, y_0)$ потрібно вибирати так, щоб підінтегральні вирази мали зміст і якомога більше спрощувались при інтегруванні.

Зауваження. Розглянемо як приклад *поняття потенціального поля*.

Нехай поле задано вектором сили $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. Тоді робота A, виконана заданою силою, при переміщенні матеріальної точки M від точки A до точки B вздовж деякої кривої $\widehat{AB}$ дорівнює криволінійному інтегралові

$$A = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ − неперервні разом із частинними похідними в однозв'язній області і виконується умова

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Тоді вираз $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$P(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \qquad Q(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.$$

Отже, матимемо рівність

$$\vec{F} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j},$$

або $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u(x,y)$. Таке поле називається *потенціальним,* а сама функція $u(x,y) -$ потенціалом поля. Робота сили, як це випливає з попереднього, в потенціальному полі не залежить від шляху переміщення точки, а дорівнює різниці потенціалів $u(B) - u(A)$.

Зауваження. Аналогічна теорема (теоремі 4) має місце для криволінійних інтегралів 2-го роду вздовж просторових кривих, які лежать на поверхнево-однозв'язній тривимірній області G .

Теорема 5. *Нехай функції* $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ *неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку в замкненій поверхневій області* G. *Тоді наступні чотири умови еквівалентні.*

1) *Для довільної замкненої кусково-гладкої кривої, що належить області* G

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

2) Криволінійний інтеграл

$$\int_{MN} Pdx + Qdy + Rdz$$

не залежить від форми шляху інтегрування, який лежить в області G.

3) Вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ *є повним диференціалом деякої функції, визначеної в області* G *, тобто існує така функція* $u(x, y, z)$*, визначена в області* G *, що*

$$du = Pdx + Qdy + Rdz.$$

4) В усіх точках області G *виконуються рівності*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Зауваження. Має місце формула для знаходження функції трьох змінних за її повним диференціалом $du = Pdx + Qdy + Rdz$

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz.$$

Вона виводиться аналогічно формулі (2.14) при обчисленні криволінійного інтеграла $\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz$ вздовж відповідної ламаної лінії.

Зауваження. Формулу Гріна можна записати також в векторній формі. Для цього дамо поняття *ротора* векторного поля. Нехай векторне поле задається функцією

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Означення. *Ротором (вихором)* векторного поля $\vec{F}$ називається вектор

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Формула Гріна в векторній формі записується у такому вигляді (випливає із теореми Стокса при переході від тривимірного випадку до випадку двох координат):

$$\oint_K \vec{F}d\vec{r} = \iint_S \left(\operatorname{rot}\vec{F}\right) \cdot \vec{k}dxdy,$$

де $\vec{k}$ $-$орт осі OZ .

Завдання для самоконтролю

1. Довести формулу Гріна, навести приклад її раціонального застосування.

2. Записати умову незалежності криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування, навести приклад обчислення з її застосуванням.

3. Записати і пояснити формули знаходження функції за її повним диференціалом.

4. Сформулювати основні геометричні застосування криволінійних інтегралів.

5. Записати формулу для обчислення площі плоскої фігури як наслідок формули Гріна та через визначений інтеграл (різні форми задання кривих, які обмежують фігуру).

6. Пояснити застосування криволінійних інтегралів до розв'язування задач з фізики.

7. Обчислити масу однорідної дуги кривої $\rho = a\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/4$.

8. За допомогою формули Гріна обчислити $\oint\limits_L \left(-x^2 y\right) y dx + xy^2 dy,$ де L: $x^2 + y^2 = R^2$ − коло, яке пробігається проти руху годинникової стрілки.

9. За допомогою формули Гріна обчислити $\oint\limits_L (x^2 + y^2)\,dx - (x^2 - y^2)\,dy,$ де $L-$ контур, утворений синусоїдою $y = \sin x$ та відрізком осі OX при $0 \le x \le \pi$.

10. Обчислити криволінійні інтеграли від повних диференціалів:

1) $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} y\,dx + x\,dy;$ 2) $\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy\,dx + x^2 dy\,;$

3) $\int\limits_{(3,\,4)}^{(5,12)} \dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$ ($O\left(0,0\right)$не лежить на контурі інтегрування);

4) $\int\limits_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} x\,dx - y^2 dy + z\,dz$; 5) $\int\limits_{(1,\,2,\,3)}^{(3,2,1)} y\,z\,dx + z\,x\,dy + x\,y\,dz.$

11. Довести, що дані вирази є повними диференціалами функції $u(x,y)$ та знайти ці функції:

1) $\dfrac{x+y}{xy}dx + \dfrac{y-x}{y^2}dy$; 2) $x^2dx + y^2dy$;

3) $4(x^2-y^2)(x\,dx - y\,dy)$; 4) $\dfrac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$;

5) $(2x\cos y - y^2\sin x)\,dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy$;

6) $\dfrac{dx+dy+dz}{x+y+z}$; 7) $\dfrac{yz\,dx + xz\,dy + xydz}{1+x^2y^2z^2}$;

8) $\dfrac{dx-3dy}{z} + \dfrac{3y-x+z^3}{z^2}dz$; 9) $\dfrac{2(xz\,dy + xy\,dz - yzdx)}{(x-yz)^2}$.

Лекція 3. Поверхневі інтеграли 1-го та 2-го роду

3.1. Поняття поверхневого інтеграла 1-го роду, його обчислення та основні властивості.

3.2. Поняття сторони поверхні. Потік векторного поля.

3.3. Поверхневий інтеграл 2-го роду, його обчислення та основні властивості.

3.4. Основні застосування поверхневих інтегралів 1-го та 2-го роду.

Поверхневий інтеграл – це визначений інтеграл, який обчислюється по поверхні. Його можна розглядати як подвійний інтегральний аналог лінійного інтеграла.

3.1. Поняття поверхневого інтеграла 1-го роду, його обчислення та основні властивості

Означення. Поверхня називається *гладкою* [6], якщо в кожній її точці можна провести дотичну площину і при переході від точки до точки положення цієї дотичної площини змінюється неперервно.

Означення. Поверхня σ називається *кусково-гладкою,* якщо вона може бути представлена у вигляді об'єднання скінченного числа неперервно сполучених гладких поверхонь.

Нехай $f(M) = f(x, y, z) -$ функція, визначена і неперервна на деякій гладкій чи кусково-гладкій поверхні σ. Для простоти обмежемось гладким випадком. Розіб'ємо поверхню на n довільних поверхонь σ_i без спільних внутрішніх точок (рис.3.1).

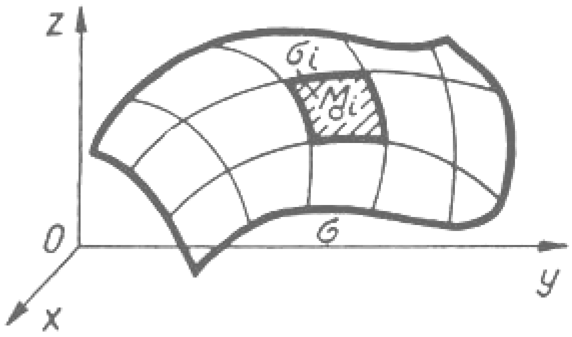

Рис. 3.1. Розбиття поверхні.

Нехай $\Delta\sigma_i$ – площа, $d(\sigma_i)$ –діаметр частини поверхні σ_i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. У кожній частині σ_i фіксуємо довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, обчислимо значення функції в кожній такій точці $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ та складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\sigma_i. \quad (3.1)$$

Означення. Сума вигляду (3.1) називається *інтегральною сумою для функції* $f(x, y, z)$ по поверхні σ.

Означення. Якщо інтегральна сума (3.1) при $\lambda = \max_{1 \le i \le n} d(\sigma_i) \to 0$ має скінченну границю I, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ, ні від вибору точок $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, то цю границю називають *поверхневим інтегралом першого роду* від функції $f(x, y, z)$ по поверхні σ і позначають

$$I = \iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma. \quad (3.2)$$

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду здійснюється шляхом зведення поверхневого інтеграла до подвійного.

Нехай гладка поверхня σ , задана рівнянням $z = z(x, y)$, проектується на площину XOY в область D_{xy}. Припустимо, що функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ, а функції $z(x, y), z'_x(x, y)$ і $z'_y(x, y)$ неперервні в замкненій області D_{xy}.

Проекцією розбиття поверхні σ на частини σ_i на площину XOY є розбиття області D_{xy} на частини S_i (рис. 3.2).

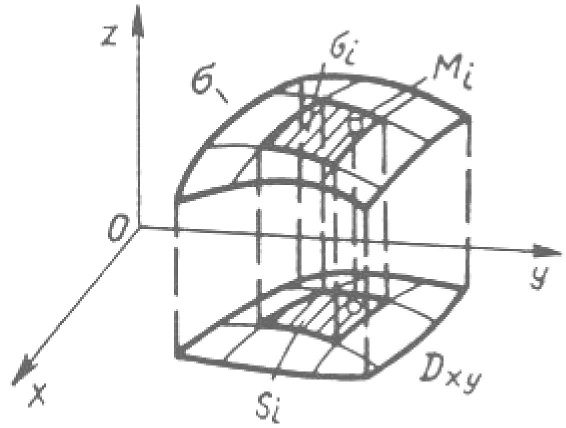

Рис. 3.2. Проекція поверхні на координатну площину.

Якщо ΔS_i − площа області S_i, а $\Delta\sigma_i$− площа поверхні σ_i, то

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + (z'_x(\xi_i,\eta_i)^2 + \left(z'_y(\xi_i,\eta_i)\right)^2}\Delta S_i,$$

тому інтегральну суму (3.1) можна записати у вигляді

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,z(\,\xi_i,\eta_i))\sqrt{1 + (z'_x(\xi_i,\eta_i)^2 + \left(z'_y(\xi_i,\eta_i)\right)^2}\Delta S_i. \qquad (3.3)$$

Права частина цієї рівності є інтегральною сумою для подвійного інтеграла від неперервної в області D_{xy} функції

$$f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}.$$

Із записаних рівностей і маємо формулу

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}\,dxdy, \qquad (3.4)$$

яка виражає поверхневий інтеграл першого роду через подвійний інтеграл по проекції поверхні σ на площину XOY.

Зауваження. Аналогічні формули мають місце і для випадків, коли гладка поверхня σ задається рівнянням $x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz} \subset \mathbb{R}^2$ або рівнянням $y = y(x,z), (x,z) \in D_{xz} \subset \mathbb{R}^2$:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2+(x'_z)^2}\,dydz,$$

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+\left(y'_x\right)^2+\left(y'_z\right)^2}\,dxdz, \qquad (3.5)$$

де D_{yz}, D_{xz} – проекції поверхні σ на координатні площини YOZ і XOZ відповідно.

Зауваження. Для поверхні σ, яка задається параметричними рівняннями

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v),$$

де функції $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ – неперервні в області G разом із частинними похідними першого порядку, а функція $F(x,y,z)$ неперервна на поверхні σ, отримують формулу для обчислення поверхневого інтеграла у вигляді

$$\iint\limits_{\sigma} F(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{G} F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv,$$

де

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \qquad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл $I = \iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)d\sigma$, де σ – частина конічної поверхні $z^2 = x^2+y^2$, яка обмежена площинами $z=0,\ z=1$.

Розв'язування.

За виглядом поверхні (рис. 3.3), її зручно спроектувати в координатну площину XOY.

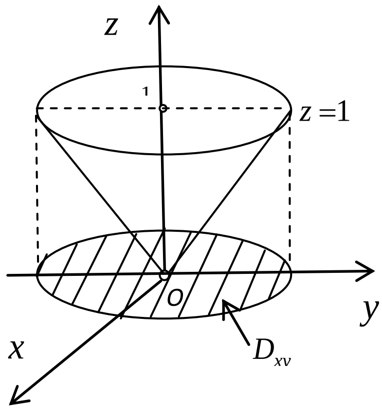

Рис. 3.3. Конічна поверхня.

Використаємо для обчислення формулу (3.4). Маємо

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\,,\;\; \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\;\; \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\;\; d\sigma=\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dx\,dy,$$

$$d\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\sqrt{2}\,dxdy.$$

Оскільки область інтегрування на $D_{xy}-$ круг $x^2+y^2\le 1,$ то в подвійному інтегралі перейдемо до полярної системи координат

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3\sqrt{2}\,d\rho=2\pi\sqrt{2}\,\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^1=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Основні властивості поверхневих інтегралів першого роду

1) Властивість лінійності

$$\iint\limits_{\sigma}af\left(x,\,y,\,z\right)d\,\sigma=a\iint\limits_{\sigma}f\left(x,\,y,\,z\right)d\,\sigma,\ \text{де } a-\text{стала};$$

$$\iint\limits_{\sigma}\left(f+g\right)d\sigma=\iint\limits_{\sigma}f\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma}g\,d\sigma\,.$$

2) Властивість адитивності

Якщо поверхню σ розбити на дві частини $\sigma_1,\sigma_2,$ $\sigma=\sigma_1\bigcup\sigma_2,$ $\sigma_1\bigcap\sigma_2=\varnothing,$ тоді

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint_{\sigma_1} f(x, y, z)d\sigma + \iint_{\sigma_2} f(x, y, z)d\sigma.$$

3) Якщо в замкненій області σ функції $f(x,y,z)$ і $g(x,y,z)$ неперервні та задовольняють співвідношення $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$, тоді справедлива нерівність:

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma \geq \iint_{\sigma} g(x,y,z)\,d\sigma.$$

4) Абсолютна величина інтеграла не перевищує інтеграла від абсолютної величини підінтегральної функції:

$$\left|\iint_{\sigma} f(x,y)\,d\sigma\right| \leq \iint_{\sigma} \left|f(x,y)\right| d\sigma.$$

5) **Теорема про середнє** $[1]$. *Якщо функція* $f(x,y,z)$ *неперервна на обмеженій замкненій поверхні* σ*, то справедлива формула*

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = f(x_0,y_0,z_0)\cdot\Delta\sigma,$$

де $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\sigma$, $\Delta\sigma$*−площа поверхні* σ*. Значення* $f(x_0,y_0,z_0)$ *називають середнім значенням функції на поверхні* σ*.*

Геометричний зміст поверхневого інтеграла першого роду

Якщо $f(x,y,z) = 1$, то площа поверхні σ обчислюється за формулою

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma.$$

Механічний зміст поверхневого інтеграла першого роду

Якщо *f(M)* − поверхнева щільність маси, розподіленої по поверхні σ, то інтеграл (3.2) дає масу всієї поверхні; якщо *f(M)* − щільність електричного заряду, то інтеграл дає електричний заряд поверхні.

3.2. Поняття сторони поверхні. Потік векторного поля

Поверхня, у якої фіксована одна з її сторін, називається *орієнтовною.*

Так як вибір напряму нормалі визначає сторону поверхні, *орієнтацію поверхні* часто називають вибором сторони поверхні − звідси термін «*двостороння поверхня*». Двосторонні поверхні характеризуються такою властивістю: якщо основу вектора нормалі $\vec{n}$ неперервно переміщати по будь-якому замкненому контуру L, що лежить на поверхні і не перетинає її межу, то при поверненні в вихідну точку напрям $\vec{n}$ співпаде з початковим. Прикладами двосторонніх поверхонь є площина, сфера, довільна поверхня, задана рівнянням $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$, $f_x'(x, y)$, $f_y'(x, y)$ − функції, неперервні в деякій області D площини XOY, тор та ін. Якщо, зокрема, $\sigma -$ орієнтовна (сторона вже вибрана) поверхня, обмежена контуром L, який не має точок самоперетину, то за *додатний* напрям обходу контуру L вважають той, при русі по якому сама поверхня залишається зліва по відношенню до точки, яка здійснює обхід (рис. 3.4).

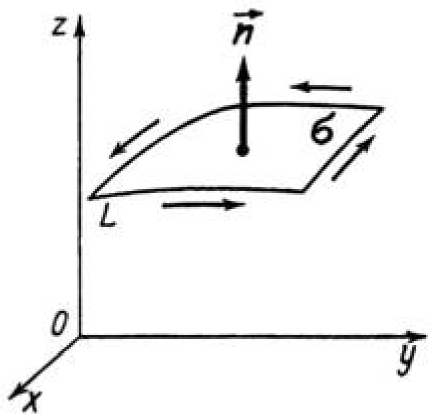

Рис. 3.4. Орієнтована поверхня.

Протилежний напрям вважають *від'ємним*. Якщо змінити орієнтацію поверхні, то додатний і від'ємний напрями обходу контуру поміняються місцями.

Якщо на поверхні знайдеться замкнений контур, при неперервному переміщенні вздовж якого вектор нормалі, повертаючись у вихідну точку, змінює свій початковий напрям на протилежний, то таку поверхню називають *односторонньою*. Для односторонніх поверхонь вказане переміщення нормалі

$\vec{n}$ при поверненні в вихідну точку приводить до вектора -$\vec{n}$. Класичним прикладом односторонньої поверхні є лист Мебіуса (рис. 3.5).

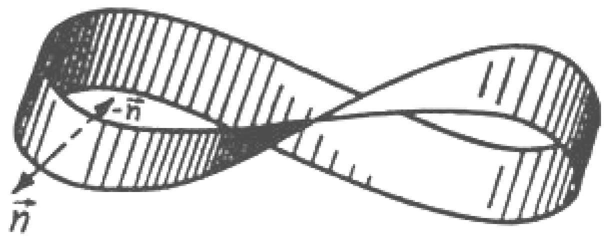

Рис. 3.5. Лист Мебіуса.

Вийшовши з якої-небудь точки листа Мебіуса з визначеним напрямом нормалі $\vec{n}$, можна неперервним рухом, ніде не перетинаючи межу листа, прийти в ту ж точку з протилежним напрямом нормалі. Односторонні поверхні неорієнтовні.

Надалі будемо розглядати тільки двосторонні поверхні.

Розглянемо задачу обчислення потоку рідини, що протікає через орієнтовну поверхню, яка і приведе до поняття поверхневого інтеграла 2-го роду.

Нехай простір заповнено рухомою рідиною зі змінною швидкістю $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ в кожній точці. Запишемо цю швидкість через проекції на координатні осі у вигляді

$$\vec{v}(x, y, z) = v_x(x, y, z)\vec{i} + v_y(x, y, z)\vec{j} + v_z(x, y, z)\vec{k}.$$

Із фізики відомо, що об'єм рідини, яка протікає за одиницю часу через деяку орієнтовану поверхню σ, називається *потоком рідини* або *потоком векторного поля* $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$.

Обчислимо потік рідини. Для цього довільними лініями розіб'ємо поверхню σ на n частинних поверхонь σ_i. Об'єм рідини $\Delta\Pi_i$, що протікає через σ_i за одиницю часу, наближено дорівнює об'ємові циліндра, тобто

$$\Delta\Pi_i \approx V_n(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\sigma_i, \tag{3.6}$$

де $V_n -$ проекція швидкості $\vec{v}$ на нормаль до поверхні в точці $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \sigma_i$, $\Delta\sigma_i -$ площа поверхні σ_i. $V_n(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ можна записати у вигляді скалярного добутку

$$V_n(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) = \left(\vec{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i), \vec{n}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\right) =$$
$$= v_x(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + v_y(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i + v_x(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i,$$

де α_i, β_i, γ_i – кути, що утворює вектор нормалі $\vec{n}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ до поверхні в точці $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) \in \sigma_i$ з координатними осями. Тоді замість (3.6) маємо наближену рівність

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n}\left(v_x(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + v_y(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i + v_x(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i\right)\Delta\sigma_i \quad (3.7)$$

для обчислення потоку рідини, що протікає через поверхню σ за одиницю часу.

Якщо в сумі (3.7) перейти до границі при $\lambda = \max_{1\le i\le n} d(\sigma_i) \to 0$, то матимемо для обчислення потоку точну рівність

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma}\left(v_x(x,y,z)\cos\alpha + v_y(x,y,z)\cos\beta + v_z(x,y,z)\cos\gamma\right)d\sigma,$$

де в правій частині міститься поверхневий інтеграл першого роду.

3.3. Поверхневий інтеграл 2-го роду, його обчислення та основні властивості

Нехай в точках деякої гладкої поверхні σ , заданої рівнянням $z = f(x,y)$ (рис. 3.6), визначена неперервна функція $R(x,y,z)$. Зорієнтуємо поверхню σ, виберемо одну з двох сторін поверхні σ, власне один із двох можливих напрямків векторів нормалі в точках поверхні. Якщо вектори нормалей складають гострі кути з віссю OZ, то вибрана верхня сторона поверхні $z = f(x,y)$, якщо тупі кути, то вибрана нижня сторона поверхні. Розіб'ємо її довільним чином на n частин. Позначимо через D_i проекцію i-тої частини поверхні σ_i на площину XOY, а через ΔS_i – площу D_i , взяту із знаком «плюс», якщо обрана верхня сторона поверхні σ, та зі знаком «мінус», якщо обрана нижня сторона поверхні (на рис. 3.6 нормаль $\vec{n}$ проведена до верхньої сторони поверхні σ). Виберемо в кожній частині σ_i довільну точку $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ і складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta S_i, \tag{3.8}$$

яка називається *інтегральною сумою для функції* $R(x, y, z)$ *по орієнтовній поверхні* σ.

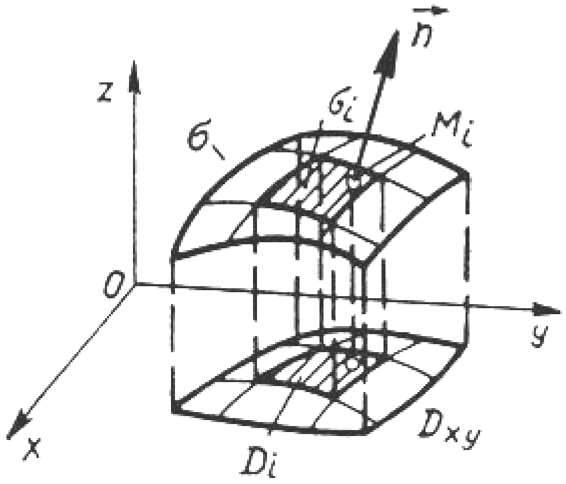

Рис. 3.6. Орієнтовна поверхня.

Нехай $d(\sigma_i)$ −діаметр частини поверхні σ_i.

Означення. Якщо інтегральна сума (3.8) при $\lambda = \max_{1 \le i \le n} d(\sigma_i) \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ, ні від вибору точок $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, то цю границю називають *поверхневим інтегралом другого роду* від функції $R(x, y, z)$ по вибраній стороні орієнтовної поверхні σ і позначають

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy$$

($dxdy$ − проекція елемента поверхні на площину XOY).

У цьому випадку функція $R(x, y, z)$ називається інтегровною по поверхні σ за змінними x і y.

У символі позначення поверхневого інтеграла другого роду, тобто в записі

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy$$

не міститься вказівки на те, яка сторона поверхні мається на увазі, тому цю вказівку необхідно робити кожен раз окремо. Із самого означення випливає, що при заміні розглядуваної сторони поверхні протилежною стороною інтеграл змінює знак.

Таким чином, за означенням

$$\iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta S_i. \qquad (3.9)$$

Аналогічно визначаються поверхневі інтеграли за координатами y,z та x,z, тобто

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz\,, \iint_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz.$$

Так як мають місце рівності $dydz = \cos\alpha d\sigma$, $dxdz = \cos\beta d\sigma$, $dxdy = \cos\gamma d\sigma$, де $d\sigma$– елемент площі поверхні σ, α,β,γ– кути між нормаллю до поверхні у довільній її точці та осями OX, OY, OZ відповідно, то поверхневий інтеграл другого роду можна звести до поверхневого інтеграла першого роду:

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint_{\sigma} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)d\sigma. \quad (3.10)$$

Ліву частину формули (3.10) називають загальним поверхневим інтегралом другого роду.

Для односторонньої поверхні поняття поверхневого інтеграла другого роду не вводиться.

Поверхневі інтеграли другого роду мають всі властивості поверхневих інтегралів першого роду, за виключенням однієї важливої відмінності: при зміні сторони поверхні на протилежну (переорієнтації) поверхневі інтеграли другого роду змінюють знак.

Обчислення поверхневих інтегралів другого роду

Обчислення і умови існування поверхневого інтеграла другого роду випливають із зведення поверхневого інтеграла до подвійного.

Нехай орієнтовна поверхня σ задана рівнянням $z = f(x, y)$ (рис. 3.6), $(x, y) \in D_{xy} \subset \mathbb{R}^2$, а $R(x, y, z)$ − неперервна функція на даній поверхні. Інтегральну суму (3.8) запишемо у вигляді

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))\, \Delta S_i, \tag{3.11}$$

де ΔS_i береться із знаком «плюс» («мінус»), коли нормаль до поверхні утворює гострий (тупий) кут з віссю OZ.

Оскільки $R(x, y, f(x, y))$ неперервна площині D_{xy}, то вона інтегровна.

Перейшовши в (3.11) до границі при $\lambda = \max_{1 \le i \le n} d(\sigma_i) \to 0$, маємо

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y)) dxdy \tag{3.12}$$

де знак «плюс» («мінус») береться, коли нормаль до поверхні σ утворює гострий (тупий) кут з віссю OZ.

Аналогічно, якщо гладка поверхня σ задана функцією $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz} \subset \mathbb{R}^2$ або $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz} \subset \mathbb{R}^2$, то для обчислення поверхневого інтеграла другого роду користуються відповідними формулами:

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz, \tag{3.13}$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dxdz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)\, dxdz. \tag{3.14}$$

Знак «плюс» беремо у цих формулах тоді, коли нормаль до поверхні σ утворює відповідно з віссю OX, з віссю OY гострий кут, а знак «мінус» − коли тупий кут; D_{yz}, D_{xz} −проекції поверхні σ на площини YOZ і XOZ відповідно.

Для обчислення інтеграла

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

використовуються формули (3.12)−(3.14), якщо поверхня однозначно проектується на всі три площини. У більш складних випадках поверхня σ

розбивається на частини, а інтеграл відповідно на суму інтегралів по цих частинах.

Дуже важливо правильно визначитись із знаками. Наприклад, якщо на рис. (3.7) вважати, що чорний елемент поверхні σ належить верхній стороні поверхні σ, то білий елемент поверхні буде елементом нижньої сторони поверхні.

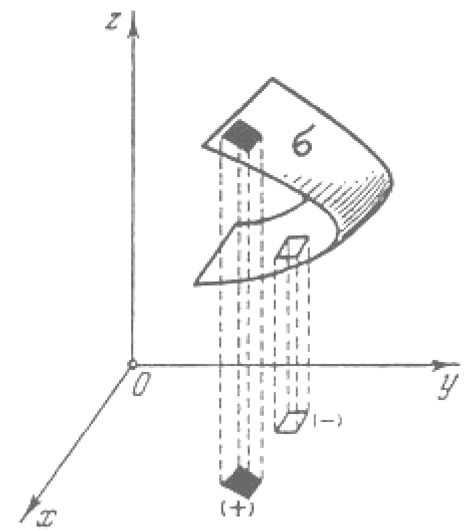

Рис. 3.7. Вибір знаку для інтеграла.

Усі одержані результати поширюються і на більш загальний випадок поверхні − замкненої або ні, також складеної зі скінченного числа правильних незамкнених гладких частин, що примикають одна до другої.

Якщо поверхня замкнена, то розрізняють зовнішню сторону поверхні та внутрішню. Зовнішню сторону поверхні називають додатною стороною, а внутрішню − від'ємною.

Поверхневі інтеграли другого роду мають всі властивості поверхневих інтегралів першого роду, за виключенням однієї важливої відмінності:

при зміні сторони поверхні на протилежну (переорієнтації) поверхневі інтеграли другого роду змінюють знак.

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\iint\limits_{\sigma} z\,dx\,dy$ по зовнішній стороні поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Розв'язування. Інтеграл можна представити у вигляді двох інтегралів

$$I=\iint\limits_{\sigma_1} z\,dx\,dy+\iint\limits_{\sigma_2} z\,dx\,dy\ ,$$

де σ_1 – зовнішня сторона верхньої частини сфери $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, σ_2 – зовнішня сторона нижньої частини сфери $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Позначимо $D=пр_{XOY}\,\sigma_1$. Поверхня σ_2 проектується на площину XOY із сторони зовнішньої нормалі, яка утворює з додатним напрямом осі Oz тупий кут. Тому при заміні інтеграла по поверхні σ_2 на подвійний інтеграл треба перед інтегралом поставити знак «$-$». Область D: $x^2+y^2\le 1$. Переходячи до полярних координат $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ \rho\in[0,1],\ \varphi\in[0,2\pi]$, маємо

$$I=2\iint\limits_{D}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho=-\frac{4}{3}\pi\left(R^2-\rho^2\right)^{3/2}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

3.4. Основні застосування поверхневих інтегралів 1-го та 2-го роду

Застосування поверхневих інтегралів першого роду до задач механіки

Нехай на кусково-гладкій поверхні σ розподілено масу з поверхневою густиною $\gamma=\gamma(x,y,z)$. Тоді

Маса матеріальної поверхні обчислюється за формулою

$$m=\iint\limits_{\sigma}\gamma(x,y,z)d\sigma.$$

Координати центра маси поверхні обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{1}{m} M_{yz} = \frac{1}{m} \iint\limits_{\sigma} x\,\gamma(x,y,z)d\sigma,$$

$$y_c = \frac{1}{m} M_{xz} = \frac{1}{m} \iint\limits_{\sigma} y\,\gamma(x,y,z)d\sigma,$$

$$z_c = \frac{1}{m} M_{xy} = \frac{1}{m} \iint\limits_{\sigma} z\,\gamma(x,y,z)d\sigma,$$

де M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – статичні моменти поверхні σ відносно координатних площин YOZ, XOZ, XOY відповідно.

Моменти інерції поверхні відносно осей координат обчислюються за формулами:

$$I_{OX} = \iint\limits_{\sigma} (y^2 + z^2)\,\gamma(x,y,z)d\sigma,$$

$$I_{OY} = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + z^2)\,\gamma(x,y,z)d\sigma,$$

$$I_{OZ} = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)\,\gamma(x,y,z)d\sigma,$$

а *момент інерції відносно початку координат* обчислюється за формулою:

$$I_O = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2)\,\gamma(x,y,z)d\sigma.$$

Фізичний зміст поверхневого інтеграла другого роду

Нехай

$$\vec{F}(x,y.z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

є швидкість рідини або газу, що протікає через поверхню σ. Тоді об’єм потоку рідини або газу, що протікає за одиницю часу через обрану сторону поверхні σ, знаходять за формулою:

$$\prod = \iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

де $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + cos\beta\,\vec{j} + cos\gamma\vec{k}$ – одиничний нормальний вектор.

Завдання для самоконтролю

1. Поверхня в просторі, її різновиди. Орієнтовані поверхні.
2. Означити поверхневий інтеграл 1-го роду, умови його існування.
3. Описати фізичну задачу, яка приводить до поняття поверхневого інтеграла 1-го роду.
4. Розглянути задачу обчислення потоку рідини зі змінною швидкістю через орієнтовану поверхню.
5. Дати означення поверхневого інтеграла 2-го роду, записати його через поверхневий інтеграл 1-го роду.
6. Записати формули обчислення поверхневого інтеграла 1-го та 2-го роду.
7. Записати формули застосування поверхневих інтегралів до розв’язування фізичних задач.
8. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_{\sigma}(3x+10y-z)\,d\sigma,$ де $\sigma-$ частина площини $(p): x+3y+2z=6,$ яка відтинається координатними площинами.
9. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma,$ де σ − частина поверхні конуса $x^2+y^2=z^2,\ 0\le z\le 1.$
10. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)\,d\sigma,$ де $\sigma-$ сфера $x^2+y^2+z^2=1$.
11. Знайти масу, розподілену по поверхні куба $|x|\le a,\ |y|\le a,\ |z|\le a$, якщо поверхнева густина в кожній точці дорівнює $k\sqrt[3]{|xyz|},\ k>0$.
12. Знайти сумарний електричний заряд, який розподілений по частині поверхні параболоїда $2az=x^2+y^2$, обмеженого циліндром $x^2+y^2=a^2,$ якщо густина заряду в кожній точці дорівнює $k\sqrt{z},\ k>0$.

13. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma}\left(y^2+z^2\right)dydz,$ де σ – частина поверхні параболоїда $x=25-y^2-z^2$ (нормальний вектор поверхні $\vec{n}$ утворює гострий кут з ортом $\vec{i}$), яка відтинається площиною $x=0.$

14. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy,$ де σ – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=144$ в другому октанті.

15. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma} xzdxdy+xydydz+yzdxdz,$ де σ – верхня частина площини $2x+3y+6z=6$, яка відтинається координатними площинами.

16. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma} xdydz+ydxdz+zdxdy$, де σ – додатна сторона куба $x=0,\ x=1,\ y=0,$ $y=1,\ z=0,\ z=1.$

17. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma} xy\,dydz+yz\,dxdz+xz\,dxdy,$ де σ – зовнішня сторона піраміди $x+y+z=1,$ $x=0,\ y=0,\ z=0.$

18. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z\vec{k}$ через повну поверхню тіла $\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le H$ в напрямі зовнішньої нормалі.

19. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=2x\vec{i}-y\vec{j}$ через частину поверхні циліндра $x^2+y^2=R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ 0\le z\le H$ в напрямі зовнішньої нормалі.

20. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}-2z\vec{k}$ через повну поверхню куба $|x|\le a,\ |y|\le a,\ |z|\le a$, в напрямі зовнішньої нормалі.

Лекція 4. Векторне та скалярне поле

4.1. Похідна за напрямком, градієнт скалярного поля, оператор Гамільтона.

4.2. Векторне поле, дивергенція, ротор, циркуляція.

4.4. Основні характеристики полів.

4.4.1. Потенціальне векторне поле.

4.4.2. Ротор векторного поля.

4.4.3. Дивергенція векторного поля.

4.4.4. Вихрові шнури.

4.4.5. Оператор Гамільтона у векторному полі.

Багато задач фізики, електротехніки, механіки, також математики та інших технічних наук приводять до розгляду скалярних та векторних полів. З огляду на різноманітність поверхонь та поверхневих, криволінійних інтегралів можна інтегрувати ці поля, тому детальніше зупинимось на їх вигляді та характерних їм особливостям.

4.1. Похідна за напрямком і градієнт скалярного поля

Означення. Нехай кожній точці деякій області простору поставлено у відповідність значення деякого скаляра u, тоді будемо говорити , що в цій частині простору визначене скалярне поле u.

Приклади скалярного поля: поле температури нагрітого тіла, поле тиску повітря в атмосфері, поле густини речовини в об’ємі.

Зауваження 1. Іноді використовують плоскі поля, коли кожній точці площини ставиться у відповідність деяке значення скаляра. Наприклад, поле температури в даний момент на поверхні землі, поле тиску, тощо.

Якщо фіксована прямокутна система координат в просторі, скалярне поле задається як функція трьох змінних $u = u(x, y, z)$.

Для плоского скалярного поля маємо функцію двох змінних в системі координат на площині $u = u(x, y)$.

Зауваження 2. Часто потрібно розглядати змінні поля, коли функція u залежить не тільки від координат точки, але і від часу:

$$u = u(x, y, z, t).$$

Будемо розглядати лише стаціонарні поля, які не залежать від часу. Теорія стаціонарних полів має велике самостійне значення. З іншого боку, вона є основою для вивчення нестаціонарних полів.

Означення. Множину точок площини, в яких поле має одне й теж саме значення, будемо називати поверхнями рівня поля [5].

Таким чином, рівняння поверхонь рівня поля має вигляд:

$$u(x, y, z) = C,$$

де C − довільна стала, яка може приймати будь-які допустимі значення.

Зауваження 3. У випадку плоского поля маємо лінії рівня, які визначаються рівнянням $u(x, y) = C$. Прикладами таких лінії можуть бути ізобари (лінії рівних тисків), ізотерма (лінії рівних температур).

Розглянемо похідну за напрямом скалярного поля.

Нехай задано скалярне поле $u = u(x, y, z)$ і деякий напрям $\vec{l}_0 = \cos\alpha \vec{i} + \cos\beta \vec{j} + \cos\gamma \vec{k}$. Зафіксуємо точку M_0 і візьмемо довільну точку M , яка лежить на прямій M_0M , паралельній напряму $\vec{l}_0$.

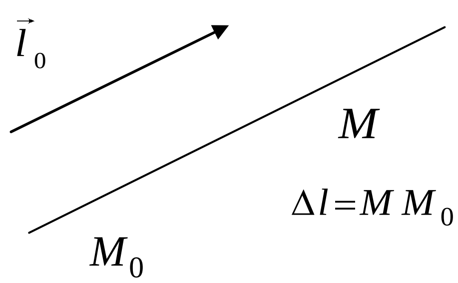

Рис. 4.1. Похідна за напрямом.

Означення. *Похідною за напрямом* l скалярного поля $u(x, y, z)$ будемо називати

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l}.$$

Запишемо параметричні рівняння прямої $M_0\, M$:

$$x = x_0 + t\cos\alpha;\, y = y_0 + t\cos\beta;\ z = z_0 + t\cos\gamma.$$

Тоді маємо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{t \to 0} \frac{u(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma) - u(x_0,\ y_0,\ z_0)}{t} = u(t).$$

Обчислюючи похідну складеної функції $u(t)$, маємо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{4.1}$$

Означення. *Градієнтом скалярного поля* u будемо називати вектор

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\ . \tag{4.2}$$

Враховуючи це означення, маємо такі формули для обчислення похідної

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u \cdot \vec{l}_0 = np_{l_0} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u,$$

тобто похідна за напрямом дорівнює проекції вектора градієнта на заданий напрям.

Властивості градієнта

1. Градієнт напрямлений до нормалі до поверхні рівня.

2. Градієнт вказує напрям найбільшого зростання поля $u = u(x, y, z)$.

3. Градієнт є інваріантом скалярного поля (не залежить від системи координат).

Оператор Гамільтона

Означення. *Оператором Гамільтона* будемо називати вектор

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

де $\vec{\nabla}$ − оператор «набла».

Тоді маємо: $\overrightarrow{\text{grad}}\, u = \vec{\nabla} u, \quad \dfrac{\partial u}{\partial l} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{l}_0$.

Властивості оператора Гамільтона

Якщо u, v неперервні функції від змінних x, y, z, які мають неперервні частинні похідні, то

1. $\vec{\nabla}(u+v) = \vec{\nabla} u + \vec{\nabla} v$;
2. $\vec{\nabla}(uv) = u\vec{\nabla} v + v\vec{\nabla} u$;
3. $\vec{\nabla} F(u) = \dfrac{dF}{du}\vec{\nabla} u$, де $F = F(u)$ − складна диференційована функція.

Існують такі види скалярних полів.

Означення. Скалярне поле будемо називати *циліндричним*, якщо його значення в кожній точці M залежать від відстані точки M до деякої осі l.

Якщо за вісь l взяти вісь OZ, то циліндричне поле можна задати функцією $u(x, y) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = u(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, таким чином циліндричне поле є частинний випадок плоского поля.

Поверхні рівня цього поля $u(\rho) = C$, $\rho = C$, $x^2 + y^2 = C^2$, таким чином, поверхні рівня є кругові циліндри.

Означення. Скалярне поле будемо називати *сферичним*, якщо в кожній точці M його значення залежить від відстані OM, O − фіксована точка.

Якщо точка O є початок координат, то сферичне поле можна задати функцією $u(r) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$. Поверхні рівня задаються $u(r) = C$, що рівносильно $r = C$, $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$, тобто маємо сфери з центром в точці O.

Означення. Якщо функція $u = u(M)$ скалярного поля приймає одні і ті ж значення у точках площин, які проходять через одну й ту ж пряму (вісь поля), то таке поле будемо називати *осесиметричним*.

Поверхні рівня – це поверхні обертання, осі яких співпадають з віссю поля. Якщо за цю вісь прийняти вісь OZ, то при дослідженні таких полів доцільно використати або сферичні, або циліндричні координати:

$$u = u(r, \theta), \ u = u(r, z).$$

Приклад. Обчислити ґрадієнт циліндричного поля

$$u(x, y) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = u(\rho), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Розв'язування. Обчислюючи похідні, маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{x}{\rho}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{y}{\rho} .$$

Таким чином, $\overrightarrow{\mathrm{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{x}{\rho}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{y}{\rho}\vec{j} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right).$

4.2. Векторне поле, дивергенція, ротор, циркуляція

Означення. Якщо кожній точці M тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ (або в деякій області цього простору) $[8]$ поставлено у відповідність вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, тоді вважають, що визначено *векторне поле.* Для того, щоб описати векторне поле, потрібно задати векторну функцію трьох змінних

$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z).$$

Прикладами векторних полів є: напруженість електростатичного поля, індукція магнітного поля, поле швидкостей потоку рідини, силове поле Сонця. Векторним полем є також поле ґрадієнта скалярної функції $u(M) = u(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Якщо $\vec{a} = \vec{a}(M)$ є деяке векторне поле в просторі, тоді в декартовій системі координат його записують у вигляді

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

де $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z) -$ проекції вектора $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ на координатні осі.

Для зображення векторних полів використовують лінії стоку та векторні трубки. Нехай функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Означення. *Векторною лінією* поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ називають криву L, у кожній точці якої дотична має напрям вектора поля.

Зокрема, якщо $\vec{a} = \vec{a}(M)$ є поле швидкостей стаціонарного потоку рідини, то його векторні лінії є траєкторії частинок рідини.

Векторні лінії для векторного поля визначається системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Приклад. По нескінченно довгому прямолінійному проводу тече сталий струм сили I. Напруженість магнітного поля в зовнішніх по відношенню до проводу точках визначається співвідношенням:

$$H_x = -2I\frac{y}{\rho^2}, \quad H_y = -2I\frac{x}{\rho^2}, \quad H_z = 0, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Знайти векторні лінії магнітного поля.

Розв'язування. Система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z}.$$

Оскільки $H_z = 0$, то $d\,z = 0,\ z = const = C_1$ − це множина горизонтальних площин. Поле можна вважати плоским. Далі,

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}, \quad x\,dx = y\,dy, \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1, \quad x^2 + y^2 = C\,,$$

тобто маємо множину концентричних кіл.

Означення. *Векторною трубкою* називають поверхню, утворену векторними лініями, які проходять через точки деякої замкненої кривої, яка знаходиться в полі і не збігається з будь-якою векторною лінією.

Вивчення векторного поля полегшується для таких полів:

1. *Плоскопаралельне поле* – поле, в якому проекції вектора $\vec{a}(M)$ на координатні осі залежить тільки від двох змінних, наприклад, від змінних x та

y. Якщо при цьому $R(x,y)=0$, то поле називають *плоским* (поле швидкостей рідини, швидкості частинок якої є паралельні деякій фіксованій площині і не залежать від відстані частинок до деякої площини).

2. *Осесиметричне поле* – векторне поле, якщо існує така циліндрична система координат r, θ, z, що в кожній точці M вектор $\vec{a}(M)$ залежить тільки від r та z і не залежить від θ. Якщо вектор $\vec{a}(M)$ залежить тільки від z, то поле називають *циліндричним.*

3. *Одновимірне поле* – поле, якщо існує така декартова система координат, в якій проекції вектора $\vec{a}(M)$ відповідно дорівнюють

$$P(x,y,z)=p(x), \quad Q(x,y,z)=R(x,y,z)=0.$$

Зауваження. Поле градієнта скалярного поля $u=u(x,y,z)$ є векторне поле. Це поле називають *потенціальним* полем, а скалярне поле $u=u(x,y,z)$ називають *потенціалом* векторного поля

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Нехай маємо векторне поле

$$\vec{a}=P(x,y,z)\vec{\imath}+Q(x,y,z)\vec{\jmath}+R(x,y,z)\vec{k}$$

і нехай $P, Q, R -$ неперервні функції, що мають частинні похідні першого порядку в деякій точці. Таке векторне поле називають *неперервно-диференційовним.*

Означення. Вираз

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

називають *дивергенцією* поля $\vec{a}(M)$ у даній точці і позначають

$$div\,\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}. \tag{4.3}$$

Зауваження. Через оператор «набла» $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ дивергенцію можна записати як скалярний добуток

$$div\,\vec{a}=\left(\vec{\nabla},\vec{a}\,\right).$$

Означення. Вектор з координатами $\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ називають *ротором (вихором)* векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ у точці $M(x,y,z)$ і позначають

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z};\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x};\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right). \qquad (4.4)$$

Означення. Криволінійний інтеграл по замкненому контуру L (замкнена гладка крива в області D)

$$\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

називають *циркуляцією* векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ вздовж кривої L і позначають

$$\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\oint_L \vec{a}\,d\vec{r}, \qquad (4.5)$$

де $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$.

Мають місце такі формули:

1. $\operatorname{rot}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u=0$;
2. $div\operatorname{rot}\vec{a}=0$;
3. $div\,\overrightarrow{\operatorname{grad}u}=\Delta u,\ \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;
4. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\overrightarrow{a}-\Delta\overrightarrow{a}, \Delta\overrightarrow{a}=\Delta P\vec{i}+\Delta Q\vec{j}+\Delta R\vec{k}$.

4.3.Основні характеристики полів

4.3.1. Потенціальне векторне поле

Розглянемо плоске векторне поле $\vec{a}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$.

Нехай у деякій однозв'язній області D поля виконується умова

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}.$$

Тоді вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u=u(x,y)$, тобто $du=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy$, де

$$P(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx, \quad Q(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy .$$

Але тоді задане векторне поле можна записати так:

$$\vec{a}(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\vec{j}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u(x,y) .$$

Іноді перед градієнтом ставиться знак «$-$», що не має принципового значення, а лише відповідає конкретному фізичному змісту. Наприклад, для електростатичного поля $\vec{a}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u$ знак «$-$» означає, що в напрямку вектора напруги електричного поля $\vec{F}$ електричний потенціал спадає.

Як бачимо, умова $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ в потенціальному полі рівнозначна існуванню повного диференціала. Відповідно, задача відшукання повного диференціала рівнозначна задачі обчислення потенціалу векторного поля.

Зазначимо, що потенціал векторного поля обчислюється з точністю до довільної сталої на підставі того, що $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(u+C\right)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u$.

У потенціальному векторному полі циркуляція не залежить від шляху інтегрування, а лише від початкової і кінцевої точок $M_0(x_0;y_0;z_0)$ та $M(x,y,z)$:

$$\int_L \vec{a}\,\overrightarrow{dr}=\int_{M_0}^{M} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{M_0}^{M}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=$$

$$=\int_{M_0}^{M}du=u\Big|_{M_0}^{M}=u(M)-u(M_0) .$$

Циркуляцією градієнта скалярного поля є різниця потенціалів цього поля.

Для потенціального поля справедлива теорема, яка відповідає розглянутим раніше властивостям криволінійного інтегралу:

Теорема. *Наступні чотири властивості векторного поля* $\vec{a}$*, заданого в однозв'язній області* D*, еквівалентні.*

1. Циркуляція поля $\vec{a}$ *по будь-якому замкненому контуру, розміщеному в області* D*, дорівнює нулю.*

2. Циркуляція поля $\vec{a}$ *впродовж довільної кривої* L *(яка лежить в області* D*) з початком в точці A та кінцем в точці B залежить тільки від положення точок A та B і не залежить від форми кривої.*

3. Існує функція $u(x;y;z)$ *така, що* $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}$.

4. Поле $\vec{a}$ *є безвихрове, тобто* $\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$.

4.3.2. Ротор векторного поля

За означенням *ротор* (або *вихор*) векторного поля

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

має вигляд

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Основні властивості ротора

1. Ротор сталого вектора дорівнює нулю $\mathrm{rot}\,\vec{a} = \vec{0}, \quad \vec{a} = const$;
2. $\mathrm{rot}\left(\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2\right) = \mathrm{rot}\,\vec{a}_1 \pm \mathrm{rot}\,\vec{a}_2$;
3. $\mathrm{rot}\left(u\cdot\vec{a}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}\, u}\times\vec{a} + u\cdot\mathrm{rot}\,\vec{a}$;
4. $div\,\overrightarrow{\mathrm{rot}\,a} = 0$;
5. $div\,\vec{a}_1\times\vec{a}_2 = \vec{a}_2\cdot\mathrm{rot}\,\vec{a}_1 - \vec{a}_1\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}\,a_2}$.

Нехай тепер задане потенціальне поле, а $u = u(x, y, z)$ - його потенціал. Тоді

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Обчислимо ротор потенціального поля:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

Отже, $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$, якщо поле - потенціальне.

Зворотне твердження також вірне.

Означення. Векторне поле будемо називати *безвихровим,* якщо його ротор дорівнює нулю.

Тож будь-яке потенціальне поле є безвихровим. Зокрема, рівність $\operatorname{rot}\overrightarrow{\operatorname{grad}u} = 0$ свідчить про те, що поле градієнтів завжди потенціальне.

Висновок: щоб визначити, чи буде задане поле потенціальним, достатньо пересвідчитись, щоб його ротор дорівнював нулю.

Якщо потенціальне поле $\vec{a}$ - силове, то потенціал цього поля у точці $M(x, y, z)$ дорівнює роботі сили уздовж довільної кривої, яка з'єднує точку M з точкою нульового потенціалу M_0.

4.3.3. Дивергенція векторного поля

За означенням дивергенція векторного поля

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

має вигляд

$$div\vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Векторне поле називається *соленоїдальним* (або *трубчатим*) $[5]$, якщо його дивергенція дорівнює нулю.

Зокрема, відома нам рівність $div\,\mathrm{rot}\,\vec{a} = 0$ свідчить про те, що поле ротора є *соленоїдальним.*

4.3.4. Вихрові шнури

Ми розглядаємо векторне поле в деякій просторовій області V. Цю область можуть обмежувати поверхні, окремі точки, а також лінії, які не належать області.

Означення. Вихровим шнуром $[8]$ будемо називати окрему лінію, яка обмежує область V, але не закінчується всередині області.

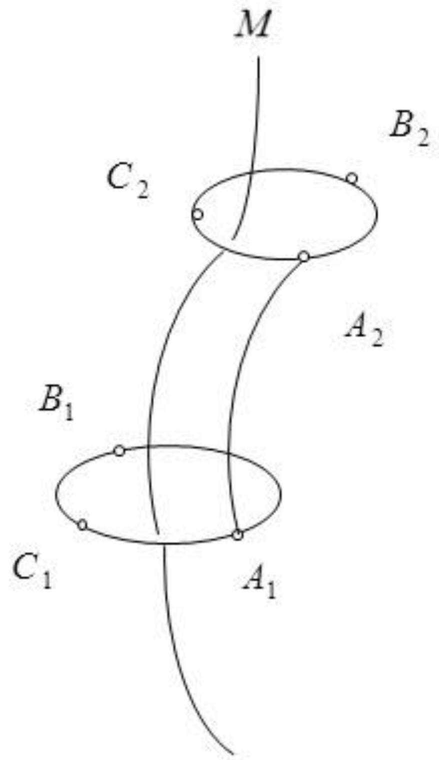

Рис. 4.2. Вихровий шнур.

Розглянемо вихровий шнур M в потенціальному полі. Область з вихровим шнуром не є однозв'язною. Замкнений контур, який охоплює шнур, не можна стягнути в точку поля, не перетинаючи межі поля. Таким чином, циркуляція поля по такому контуру не обов'язково дорівнює 0. Розглянемо два замкнених контури $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$, які охоплюють один раз вихровий шнур I і не охоплюють інші шнури. Поєднаємо точки A_1 і A_2 цих контурів, розглянемо новий замкнений контур $\left(A_1B_1C_1A_1A_2C_2B_2A_2A_1\right)$, в якому лінія A_1A_2 повторюється двічі. Цей контур можна стягнути в одну точку області, не перетинаючи її границь. Тому циркуляція поля по цьому контуру дорівнює нулю, тобто

$$\int\limits_{(A_1A_2)} \vec{a}\,d\vec{r} + \int\limits_{(A_2C_2B_2A_2)} \vec{a}\,d\vec{r} + \int\limits_{(A_2A_1)} \vec{a}\,d\vec{r} + \int\limits_{(A_1B_1C_1A_1)} \vec{a}\,d\vec{r} = 0\,.$$

Інтеграли вздовж ліній $\left(A_1 A_2\right)$ і $\left(A_2 A_1\right)$ взаємно знищуються, тому маємо

$$\int\limits_{\left(A_2 C_2 B_2 A_2\right)} \vec{a}\, d\vec{r} + \int\limits_{\left(A_1 B_1 C_1 A_1\right)} \vec{a}\, d\vec{r} = 0, \text{ або}$$

$$\int\limits_{\left(A_1 B_1 C_1 A_1\right)} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{\left(A_2 B_2 C_2 A_2\right)} \vec{a}\, d\vec{r}\,.$$

Таким чином, *циркуляція потенціального поля по замкненому контуру, який охоплює один раз вихровий шнур і не охоплює інші вихрові шнури, є величина стала, яка не залежить ні від форми, ні від положення вказаного шнура. Цю циркуляцію J будемо називати інтенсивністю або потужністю вихрового шнура.*

Зауваження 1. Знак інтенсивності J вихрового шнура залежить від напряму обходу контуру. Як правило, обирають певний напрям самого вихрового шнура і обходять контур за правилом правого гвинта:

$$J = \oint\limits_L \vec{a}\, d\vec{r}\,.$$

Зауваження 2. Відношення циркуляції поля по замкненому контуру L, який охоплює один вихровий шнур з ненульовою потужністю J, до площі поверхні S, обмеженою цим контуром, стає нескінченно великою величиною, тобто

$$\frac{\oint\limits_L \vec{a}\, d\vec{r}}{\sigma} = \frac{J}{\sigma} \to \infty,$$

коли контур L і область σ стягується в точку.

Таким чином, в усіх точках вихрового шнура з ненульовою інтенсивністю ротор поля дорівнює нескінченності.

Зауваження 3. В гідромеханіці вихровим шнуром є лінія, вздовж якої відбувається обертальний рух рідини подібно смерчу. В теорії електричних полів вихровим шнуром є провід, по якому тече струм.

Приклад. Перевірити, що векторне поле $\vec{a} = \dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{i} - \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j} + z\vec{k}$ є потенціальним. Знайти вихрові шнури та їх потужності.

Розв'язування. Обчислимо ротор поля:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} & -\dfrac{x}{x^2+y^2} & z \end{vmatrix}=0\vec{i}-0\vec{j}+$$

$$+\left(-\frac{1\left(x^2+y^2\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{1\left(x^2+y^2\right)-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\vec{k}=0\vec{i}-0\vec{j}+\left(\frac{x^2-y^2-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\vec{k}=\vec{0},$$

таким чином поле потенціальне.

Вихровим шнуром є пряма: $x=0,\ y=0,\ z=t$ (вісь OZ). Оберемо замкнений контур L – коло в площині XOY з центром в точці O:

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=0,\ t\in\left[0;\,2\pi\right].$$

Будемо обходити контур за годинниковою стрілкою (від'ємний напрям), тобто t змінюється від 2π до 0. Обчислимо

$$J=\oint_L \vec{a}\,d\vec{r}=\oint_L \frac{y}{x^2+y^2}\,dx-\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=\int_{2\pi}^{0}\frac{-\sin t\sin t-\cos t\cos t}{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=-\int_{2\pi}^{0}dt=2\pi.$$

Таким чином, маємо вихровий шнур − вісь OZ з потужністю $J=2\pi$.

4.3.5. Оператор Гамільтона у векторному полі

Нехай задано векторне поле

$$\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}.$$

Застосуємо оператор «набла» до цього векторного поля за правилами множення векторів. Оскільки добуток двох векторів може бути або скалярним, або векторним, то розглянемо спочатку скалярний добуток:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}\right)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Такий добуток є *дивергенцією* і позначається: $div\,\vec{a}$.

Отже, $div\,\vec{a}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{a}=div\,\vec{a}$.

Розглянемо тепер векторний добуток

$$\vec{\nabla}\times\vec{a}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Такий добуток є *ротором* векторного поля, і маємо

$$\mathrm{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix},\quad \vec{\nabla}\times\vec{a}=\mathrm{rot}\,\vec{a}\,.$$

Застосування оператора Гамільтона до суми скалярних полів здійснюється за правилами чисельного добутку: $\vec{\nabla}\left(u+v\right)=\vec{\nabla}u+\vec{\nabla}v$.

Застосування оператора Гамільтона до суми векторних полів здійснюється за правилами скалярного добутку: $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)=\vec{\nabla}\cdot\vec{a}_1+\vec{\nabla}\cdot\vec{a}_2$.

або за правилами векторного добутку:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)=\vec{\nabla}\times\vec{a}_1+\vec{\nabla}\times\vec{a}_2\,.$$

Фізичний зміст ротора в полі швидкостей.

Розглянемо обертання твердого тіла навколо нерухомої точки O. З кінематики відомо, що $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$. Нехай

$$\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}-const,\quad \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\,.$$

Тоді

$$\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=\left(\omega_y z-\omega_z y\right)\vec{i}+\left(\omega_z x-\omega_x z\right)\vec{j}+\left(\omega_x y-\omega_y x\right)\vec{k}\,.$$

Знайдемо

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \omega_y z-\omega_z y & \omega_z x-\omega_x z & \omega_x y-\omega_y x\end{vmatrix}=2\omega_x\vec{i}+2\omega_y\vec{j}+2\omega_z\vec{k}\,,$$

таким чином, $\operatorname{rot}\vec{v} = 2\vec{\omega}$.

Висновок. Ротор поля лінійних швидкостей твердого тіла, яке обертається, характеризує кутову швидкість (з точністю до сталого множника).

Застосування оператора Гамільтона до добутку скалярних та векторних полів

При вживанні оператора «набла» до добутку двох полів, якими можуть бути $u\cdot v$, $u\cdot\vec{a}$, $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2$, $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$, треба користуватися правилами векторної алгебри та правилами диференціювання.

Як диференціальний оператор він діє лише на множник, що стоїть безпосередньо за ним

$$\vec{\nabla}u\cdot v = \left(\vec{\nabla}u\right)\cdot v = v\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u$$

$$\vec{\nabla}\left(u\cdot v\right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(u\cdot v\right)$$

В останньому випадку за правилами диференціювання

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(u\cdot v\right) = \vec{\nabla}\left(u\cdot v\right) = \vec{\nabla}u\cdot v + u\cdot\vec{\nabla}v = v\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u + u\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,v\,.$$

Як бачимо, у процесі диференціювання на певному етапі деякі функції вважаємо фіксованими (сталими). Щоб виділити ці функції, їх позначають індексом, наприклад:

$$div\left(u\cdot\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(u\cdot\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(u_c\cdot\vec{F}\right) + \vec{\nabla}\left(u\cdot\vec{F}_c\right) =$$

$$= \vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot u_c\right) + \vec{\nabla}u\cdot\vec{F}_c = div\,\vec{F}\cdot u + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u\cdot\vec{F}$$

До речі, цей же результат можна одержати без вживання оператора «набла»:

$$div\left(u\cdot\vec{F}\,\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(uP\vec{i} + uQ\vec{j} + uR\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial\left(uP\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(uQ\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(uR\right)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}P + \frac{\partial P}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}Q + \frac{\partial Q}{\partial y}u + \frac{\partial u}{\partial z}R + \frac{\partial R}{\partial z}u =$$

$$= u\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)\left(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}\right) =$$

$$= u\,div\,\vec{F} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u\cdot\vec{F}\,.$$

Розглянемо ще один приклад.

$$div\left(\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{a}_{1c}\times\vec{a}_2\right) + \vec{\nabla}\left(\vec{F}_1\times\vec{a}_{2c}\right),$$

далі, користуючись циклічністю мішаного добутку трьох векторів

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) = \vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right),$$

запишемо останній вираз так, щоб оператор «набла» стояв безпосередньо перед тією функцією, на яку він діє:

$$\vec{a}_{1c}\cdot\left(\vec{a}_2\times\vec{\nabla}\right)+\vec{a}_{2c}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}_1\right)=-\vec{a}_{1c}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}_2\right)+\vec{a}_{2c}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}_1\right)=$$

$$=\vec{a}_2\ \mathrm{rot}\,\vec{a}_1-\vec{a}_1\,\mathrm{rot}\,\vec{a}_2.$$

Введений індекс є допоміжним і в кінці обчислення його не пишуть, наприклад,

$$\mathrm{rot}\,(u\cdot\vec{a})=\nabla\times(u\cdot\vec{a})=\vec{\nabla}x(u_c\cdot\vec{a})+\vec{\nabla}x(u\cdot\vec{a}_c)=u_c\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)-\vec{a}_c\times\vec{\nabla}\cdot u=$$

$$=u\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)-\vec{a}\cdot\vec{\nabla}u=u\cdot\mathrm{rot}\,\vec{a}-\vec{a}\times\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u.$$

Ми розглянули деякі диференціальні операції першого порядку. Після їх застосування до поля виникає нове поле, до якого знову можна вжити ці операції. У результаті маємо диференціальні операції другого порядку. Таких операцій існує лише п'ять:

У скалярному полі $u=u(x,y,z)$

1) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}u)=div\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u;$ 2) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}u)=\mathrm{rot}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u.$

У векторному полі

$$\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

мають місце такі операції

3) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,div\,\vec{a}\,;$

4) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{a})=div\,\mathrm{rot}\,\vec{a};$

5) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a})=\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}\,.$

Розглянемо деякі операції докладніше

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u=$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{i}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{j}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{k}\right)u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Оператор $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ позначається через Δ («дельта») і називається *оператором Лапласа*.

Отже, $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ або $\Delta u=div\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u$ (як відомо, векторний добуток $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$). Це означає, що поле градієнта є *безвихрове*.

Зокрема, в електротехніці

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u=0\,,\ div\,\mathrm{rot}\,\vec{a}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)=0,\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,div\,\vec{a}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right),$$

оскільки в мішаному добутку векторів є два однакових вектори. Це значить, що поле вихору – поле *соленоїдальне,*

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right) - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, div\,\vec{a} - \Delta\vec{a},$$

тут $\Delta\vec{a}$ - результат застосування оператора Лапласа до вектора $\vec{a}$, а до подвійного векторного добутку застосовано перетворення

$$\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) & \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) \end{vmatrix} = \vec{b}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Дати поняття скалярного поля в просторі, записати його основні характеристики.

2. Векторне поле, його різновиди.

3. Записати і пояснити основні характеристики векторного поля.

4. Визначення потенціальності та соленоїдальності векторного поля.

5. Оператор Гамільтона, його застосування.

6. Задана функція $u(M) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ і точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(3,2,1)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u(M_1)$ Записати найбільшу швидкість зміни вказаної функції в точці M_1.

7. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = xy(3x-4y)\vec{i} + x^2(x-4y)\vec{j} + 3z^2\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x,y,z)$.

8. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = (x-y)\vec{i} + yz\vec{j} - y\vec{k}$ в точці $M_0(-4,1,0)$.

9. Магнітне поле, утворене електричним струмом сили I, який тече по нескінченому проводу, визначається за формулою $\vec{H}(x,y) = 2I\dfrac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$. Обчислити $div\,\vec{H}(x,y)$.

10. Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{a} = x^2 y\vec{i} + xy^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ в точці $P(1, 2, -1)$.

11. Знайти дивергенцію градієнта скалярного поля $u = x^3 y^2 z$ в точці $P(1, -1, 1)$.

12. Знайти $\operatorname{rot} xyz(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$.

13. Показати, що магнітне поле $\vec{H}(x, y)$ (див. задачу 9) в області свого визначення є безвихровим.

14. Знайти $\operatorname{rot} \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \operatorname{rot} \dfrac{\vec{r}}{|r|}$.

15. Знайти ротор поля $\vec{a} \times \vec{c}$, де $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

16. Перевірити, що наступні поля соленоїдальні:

1) $\vec{a} = (x^2 y + y^3)\vec{i} + (x^3 - xy^2)\vec{j}$; 2) $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2 y\vec{j} - (x^2 + y^2)z\vec{k}$;

3) $\vec{a} = \dfrac{x}{yz}\vec{i} + \dfrac{y}{xz}\vec{j} - \dfrac{(x + y)\ln z}{xy}\vec{k}$.

17. Знайти $\operatorname{rot}(\vec{r} \cdot \vec{a})\vec{r}$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

18. Знайти $\operatorname{rot}(\vec{r} \cdot \vec{a})\vec{b}$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

19. Показати, що векторне поле $\vec{a} = f(\rho)(x\vec{i} + y\vec{j})$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ є потенціальним при будь-якій диференційованій функції $f(\rho)$.

20. Переконатися, що векторні поля є потенціальними і знайти їх потенціали :

1) $\vec{a} = (3x^2 y - y^3)\vec{i} + (x^3 - 3xy^2)\vec{j}$; 2) $\vec{a} = 2xy\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k}$;

3) $\vec{a} = (yz - xy)\vec{i} + (xz - x^2/2 + yz^2)\vec{j} + (xy + y^2 z)\vec{k}$;

4) $\vec{a} = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{x^2}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2}\right)\vec{k}$;

5) $\vec{a} = \left(\dfrac{z}{y^2} - \dfrac{y}{z^2} - \dfrac{2yz}{x^3}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{z}{x^2} - \dfrac{x}{z^2} - \dfrac{2xz}{y^3}\right)\vec{j} + \left(\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{2xy}{z^3}\right)\vec{k}$.

Лекція 5. Формули Стокса та Остроградського-Гаусса

5.1. Формула Стокса.

5.2. Формула Остроградського-Гаусса.

5.3. Джерела та стоки.

Формули Стокса і Остроградського-Гаусса є основними інтегральними формулами. Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом і криволінійним інтегралом по кривій, що обмежує цю поверхню. Формула Остроградського-Гаусса пов’язує потрійний інтеграл по просторовій області із поверхневим інтегралом по замкненій поверхні, яка обмежує цю область. Через запис формул у векторній формі дають інваріантні означення ротора (формула Стокса) та дивергенції (формула Остроградського-Гаусса) векторного поля, які мають важливе прикладне значення.

5.1. Формула Стокса

Нехай задана $[7]$ гладка поверхня σ. Позначимо (рис. 5.1) через L криву, яка обмежує цю поверхню. Виберемо додатну орієнтацію поверхні, тобто якщо дивитися з кінця нормалі, то обхід вздовж кривої L відбувається проти годинникової стрілки. Нормаль $\vec{n}$ з віссю OZ в кожній точці поверхні утворює гострий кут. Нехай $z = f(x, y)$ – рівняння гладкої поверхні σ, і на цій поверхні задана неперервно-диференційована функція $P(x, y, z)$.

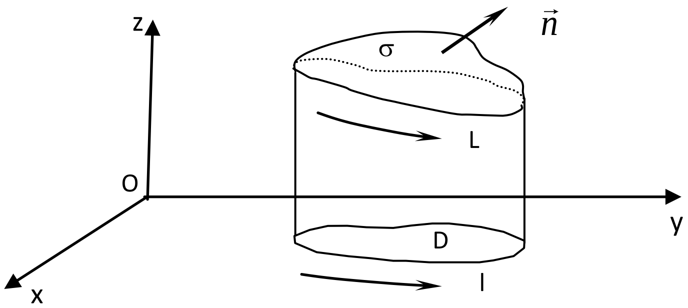

Рис. 5.1. Поверхня в просторі.

Оскільки координати контура L задовольняють рівняння $z = f(x, y)$, то значення функції $P(x, y, z)$ на контурі L дорівнюють значенням функції $P(x, y, f(x, y))$ на контурі l – проекції на площину OXY контуру L. Отже,

$$\oint_L P(x, y, z)dx = \oint_l P\left(x, y, f(x, y)\right)dx.$$

До правої частини рівності застосуємо формулу Гріна:

$$\oint_l P\left(x, y, f(x, y)\right)dx = -\iint_D \frac{\partial P\left(x, y, f(x, y)\right)}{\partial y}dxdy.$$

За формулою диференціювання складної функції отримаємо:

$$\frac{\partial P(x, y, f(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

Підставивши праву частину рівності, отримаємо:

$$\oint_L P\left(x, y, f(x, y)\right)dx = -\iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{z=f(x,y)} dxdy.$$

Врахувавши, що $dxdy = \cos\gamma d\sigma$, перетворимо в останній рівності подвійний інтеграл на поверхневий:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \iint_\sigma \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}dxdy = \iint_\sigma \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma d\sigma;$$

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}dxdy = \iint_\sigma \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}dxdy = \iint_\sigma \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma d\sigma.$$

Для поверхні, заданої рівнянням $z = f(x,y)$, напрямні косинуси нормалі обчислюються за формулами: $\cos\alpha = \dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$; $\cos\beta = \dfrac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$; $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, де $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, звідки ми отримуємо $\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma} = -\dfrac{\partial f}{\partial y} = -q$.

Використавши значення напрямних косинусів, отримаємо

$$\oint\limits_L P(x,y,z)dx = \iint\limits_\sigma \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta d\sigma - \iint\limits_\sigma \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma d\sigma. \tag{5.1}$$

Аналогічно можна отримати формули:

$$\oint\limits_L Q(x,y,z)dy = \iint\limits_\sigma \frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma d\sigma - \iint\limits_\sigma \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha d\sigma, \tag{5.2}$$

$$\oint\limits_L R(x,y,z)dz = \iint\limits_\sigma \frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha d\sigma - \iint\limits_\sigma \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta d\sigma, \tag{5.3}$$

де $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – неперервно-диференційовані функції на поверхні σ, заданій рівнянням $z = f(x,y)$. За формулами (5.1), (5.2), (5.3) можемо записати:

$$\oint\limits_\lambda P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \iint\limits_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma. \tag{5.4}$$

Цю формулу (5.4) називають *формулою Стокса.* Позначивши вектор $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, врахувавши означення циркуляції і потоку векторного поля, суть формули (5.4) можемо сформулювати в наступній теоремі.

Теорема Стокса у векторній формі. *Циркуляція векторного поля $\vec{a}$ по контуру L дорівнює потоку ротора* $\operatorname{rot}\vec{a}$ *через поверхню σ, обмежену контуром L, тобто*

$$\int\limits_L \vec{a}\, d\vec{r} = \iint\limits_\sigma \operatorname{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}\, d\sigma. \tag{5.5}$$

Користуючись формулою Стокса (5.5), можна дати інваріантне (не залежить від вибору системи координат) означення ротора векторного поля, (потрібно використати теорему про середнє значення для подвійного інтеграла):

$$\oint_L \vec{a}\,d\vec{r} = \iint_\sigma \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \operatorname{rot}_{\vec{n}}\vec{a}(P)\Delta\sigma,$$

де $\operatorname{rot}_{\vec{n}}\vec{a}(P)$ – проекція ротора поля на напрям нормалі $\vec{n}$, $\Delta\sigma$ − площа поверхні σ. Нехай поверхня σ стягується в точку M: $\sigma\to M$, при цьому точка P прямує до точки M, тоді маємо:

$$\lim_{\Delta\sigma\to M}\frac{\oint_L \vec{a}\,dr}{\Delta\sigma} = \operatorname{rot}_{\vec{n}}\vec{a}(P). \qquad (5.6)$$

Таким чином, маємо інваріантне (яке не залежить від вибору системи координат) означення ротора векторного поля.

Означення. Ротором векторного поля $\vec{a}$ в точці M будемо називати вектор, проекція якого на нормаль $\vec{n}$ до поверхні σ дорівнює границі відношення циркуляції вектора $\vec{a}$ вздовж замкненого контуру L до площі поверхні σ, яка обмежена цим контуром, коли поверхня σ стягується в точку M.

Зауваження 1. Врахувавши рівності $\cos\alpha d\sigma = dydz$, $\cos\beta d\sigma = dzdx$, $\cos\gamma d\sigma = dxdy$, формулу (5.4) можна записати у вигляді:

$$\oint_\lambda Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \quad (5.7)$$

Зауваження 2. Із формули (5.7) отримаємо формулу Гріна, якщо за поверхню σ взяти плоску область D на площині OXY. Справді, поклавши $z=0$, з формули (5.7) отримуємо $\oint_{\partial D} \mathrm{P}dx + Qdy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\right)dxdy$.

Зауваження 3. Зупинимось на дещо полегшеному варіанті отримання формули, зате на такому, який наглядно ілюструє суть усіх різновидів – зв'язок поверхневого інтегралу з подвійним, а останнього – через формулу Гріна – з криволінійним.

Розглянемо у просторі деяку поверхню σ, обмежену лінією L. Проекцією цієї поверхні на площину XOY буде область D, обмежена замкненою лінією l. Нехай у просторі задано векторне поле $\vec{a}(x;y;z)=P(x;y;z)\vec{i}+Q(x;y;z)\vec{j}+R(x;y;z)\vec{k}$. Якщо покласти $z=0$ і $R(x,y,z)=0$, матимемо плоске векторне поле, яке в області D приймає значення $\vec{a}(x;y)=P(x;y)\vec{i}+Q(x;y)\vec{j}$. Обчислимо ротор цього векторного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Тоді потік цього ротора через область D буде:

$$\iint_D \operatorname{rot}\vec{a}\,\vec{n}\,d\sigma=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\,\vec{n}\,d\sigma.$$

Оскільки нормаль $\vec{n}$ до області D співпадає з $\vec{k}$, тобто $\left(\vec{n}\cdot\vec{k}\right)=1$, тоді за формулою Гріна маємо:

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\,\vec{n}\,d\sigma=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_l \vec{a}\,\overrightarrow{dr}.$$

Остаточно маємо

$$\int_l \vec{a}\,\overrightarrow{dr}=\iint_D \operatorname{rot}\vec{a}\,\vec{n}\,d\sigma.$$

Теорема Гріна у векторній формі: *циркуляція плоского векторного поля $\vec{a}$ по замкненій лінії l, яка обмежує плоску область D, дорівнює потоку ротора цього векторного поля через цю область.*

5.2. Формула Остроградського-Гаусса

Замкнена просторова область, границя якої перетинається з довільною прямою, яка паралельна до осей координат, не більш ніж у двох точках, називається *правильною*.

Теорема. *Нехай замкнена область* G [5] *обмежена гладкою або кусково-гладкою поверхнею* σ*, а функції* $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ *неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку в даній області. Тоді має місце така формула:*

$$\iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \qquad (5.8)$$

(інтегрування проводиться по її зовнішній стороні), яка називається формулою Остроградського-Гаусса.

Доведення. Нехай область D є проекцією поверхні σ (і області G) на площину OXY (рис. 5.2),

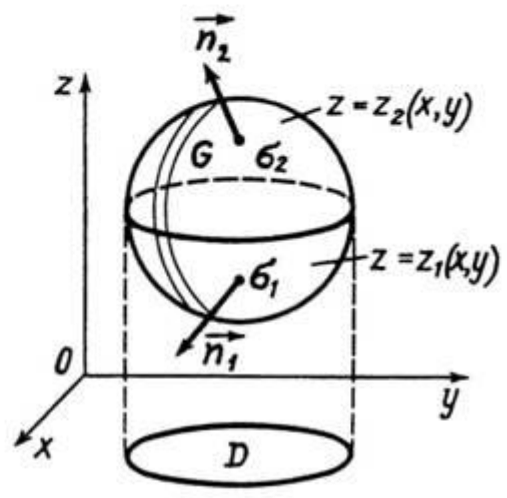

Рис. 5.2. Орієнтована поверхня в просторі.

а $z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$ − рівняння відповідних частин поверхні σ нижньої частини σ_1 і верхньої частини σ_2, які є неперервними функціями в області D.

При заданих умовах існує потрійний інтеграл $\iiint_{G} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz$ і його можна записати у вигляді повторного інтеграла, використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\iiint_{G} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz = \iint_{D} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dxdy =$$

$$= \iint_{D} [R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))] dxdy =$$

$$= \iint_{\sigma_2} R(x,y,z)\,dxdy + \iint_{\sigma_1} R(x,y,z)dxdy.$$

Останню рівність можна записати так:

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy. \tag{5.9}$$

Аналогічно можна отримати рівності

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_{\sigma} Pdydz,\ \iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_{\sigma} Qdxdz, \tag{5.10}$$

де область G є правильною відносно осей OX та OY. Тепер, нехай область G є правильною відносно трьох осей одночасно. Тоді, додавши відповідно праві і ліві частини рівностей (5.9), (5.10) отримаємо формулу Остроградського-Гаусса (5.8).

Зауваження. Формулу Остроградського-Гаусса записують також у векторній формі.

Теорема. *Нехай $G \subset R^3$ – обмежена область, межа якої σ – кусково-гладка поверхня, орієнтована зовнішніми нормалями. В області задано векторне поле*

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку в даній області. Тоді потік векторного поля $\vec{a}$ через межу області G дорівнює потрійному інтегралу від $div\vec{a}$ по області , тобто

$$\iint_{\sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}ds = \iiint_G div\,\vec{a}\,dG. \tag{5.11}$$

Формулу (5.11) в векторній формі можна сформулювати так: «Потрійний інтеграл по просторовій області від дивергенції векторного поля дорівнює потоку цього поля через замкнену поверхню, що обмежує дану область». За допомогою цієї формули можна дати інваріантне означення дивергенції векторного поля, тобто означення, яке не залежить від вибору системи координат.

Означення. Дивергенцією векторного поля $\vec{a}=\{P, Q, R\}$ у фіксованій точці M будемо називати границю відношення потоку векторного поля $\vec{a}$ через замкнену поверхню σ до об'єму ΔV, яку ця поверхня обмежує, а саме:

$$div\vec{a}(M)=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint\limits_{\sigma}\vec{a}\,\vec{n}\,d\sigma}{\Delta V}, \tag{5.12}$$

де $\vec{n}$ − зовнішня нормаль до поверхні σ.

Зауваження 1. Враховуючи формулу (5.12), можна сформулювати зміст дивергенції в полі швидкостей рідини: дивергенція є об'ємне розширення (якщо $div\vec{a}(M)>0$) або стискання (якщо $div\vec{a}(M)<0$) цієї рідини в даній точці M, віднесене до одиниці об'єму. Якщо в кожній точці поля швидкостей рідини дивергенція дорівнює 0 (поле соленоїдальне), то це означає, що рідина не розширюється і не стискається. Цю властивість має, наприклад, вода, яка тече.

Зауваження 2. Формула Остроградського-Гаусса справедлива для довільної замкненої просторової області, яку можна розбити на скінченне число правильних областей.

Зауваження 3. Формула Остроградського-Гаусса справедлива для довільної просторової області, обмеженої кількома кусково-гладкими поверхнями.

Зауваження 4. Звичайна область застосування формул Гріна, Остроградського-Гаусса та Стокса − це інтеграли другого роду по замкнених контурах на площині і замкнених поверхнях у просторі. Часто обчислення у випадку незамкненої поверхні або кривої можна спростити, якщо замкнути задану незамкнену поверхню або криву і обчислювати даний інтеграл як різницю перетвореного інтеграла по замкненій поверхні або кривій і відповідного інтеграла по замикаючій множині. В якості замикаючої множини, як правило, беруться відрізки прямих або частини площин, паралельних координатним, оскільки по таких множинах інтеграл другого роду обчислюється найбільш просто.

Зауваження 4. Формули Гріна, Стокса та Остроградського-Гаусса об'єднані однією ідеєю: вони виражають інтеграл, обчислений на деякому геометричному образу, через інтеграл, взятий по границі цього образу. При цьому формула Гріна відноситься до випадку двовимірного простору, формула Стокса теж до випадку двовимірного, але «криволінійного» простору, а формула Остроградського-Гаусса − до випадку тривимірного простору.

5.3. Джерела і стоки

Окрему граничну точку M поля, яка не співпадає з іншим граничними точками, будемо називати точковим джерелом поля $[8]$.

Будемо розглядати джерело M соленоїдального поля. Нехай поверхня σ обмежує область V поля, всередині якої розташоване джерело M, і немає інших джерел. Цю поверхню σ не можна стягти в точку поля, не перетинаючи граничної точки M. Тому потік поля через поверхню σ не обов'язково дорівнює нулю.

Розглянемо в області V іншу замкнену поверхню σ_1 (рис. 5.3).

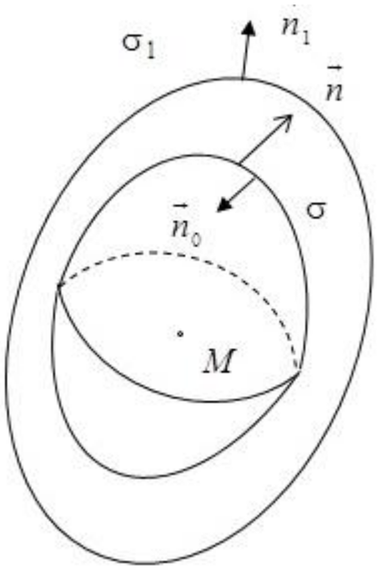

Рис. 5.3. Джерела або стоки.

В області між поверхнями σ і σ_1 містяться лише точки нашого соленоїдального поля і немає особливих точок. Тому потік через границю цієї області, яка складається з поверхонь σ і σ_1, дорівнює нулю. Відмітимо, що зовнішня по відношенню до області нормаль $\vec{n}_0$

поверхні σ є внутрішньою нормаллю по відношенню до області, яка обмежена цією поверхнею. Маємо

$$\oiint_{\sigma_1} \vec{a}\cdot\vec{n}_1\, d\sigma + \oiint_{\sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}_0\, d\sigma = 0$$

або

$$\oiint_{\sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \oiint_{\sigma_1} \vec{a}\cdot\vec{n}_1\, d\sigma \,.$$

Висновок. Потік поля через поверхню σ, яка обмежує джерело M і не обмежує інші джерела, є величина стала, яка не залежить від форми поверхні. Цей потік Π будемо називати потужністю джерела M :

$$\Pi = \oiint_{\sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}\ d\sigma \,.$$

Зауваження 1. Джерело соленоїдального поля з від'ємною потужністю будемо називати стоком поля.

Зауваження 2. Відношення потоку поля через замкнену поверхню σ, яка обмежує область V поля з джерелом M ненульової потужності, до об'єму області V, тобто

$$\frac{\iint\limits_{\sigma} \vec{a}\cdot\overrightarrow{n_0}\, d\sigma}{V} = \frac{\Pi}{V} \,,$$

прямує до нескінченності, коли поверхня σ стягується до даного джерела. Тому можна вважати, що в джерелі з ненульовою потужністю дивергенція обертається в нескінченність.

Зауваження 3. В полі швидкостей потоку рідини поняття джерела і стоку мають буквальний зміст. В теорії електричних полів джерелами є електричні заряди.

Зауваження 4. Джерелами можуть бути не тільки ізольовані точки, але і окремі області.

Приклад. Переконатися, що векторне поле $\vec{F} = \dfrac{C\vec{r}}{r^3}$, де $\vec{r} = \{x, y, z\}$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, соленоїдальне. Визначити особливу точку і обчислити її потужність. (Ця векторна функція описує магнітне, гравітаційне і електростатичне поле в залежності від сталою C).

Розв'язування. Обчислимо дивергенцію поля.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{x}{r^3}\right)'_x = \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} - x\cdot\dfrac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}\cdot 2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} =$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{-2x^2+y^2+z^2}{r^3}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x^2-2y^2+z^2}{r^3}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{x^2+y^2-2z^2}{r^3}.$$

Таким чином, $\quad div\vec{F}=\dfrac{-2x^2+y^2+z^2}{r^3}+\dfrac{x^2-2y^2+z^2}{r^3}+\dfrac{x^2+y^2-2z^2}{r^3}=0.$

Очевидно, особливою точкою є точка $O(0,\,0,\,0)$. Обчислимо $\Pi=\oiint\limits_{\sigma}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, де σ − сфера радіусу R з центром в точці $O\,(0,\,0,\,0)$. Очевидно, що на поверхні сфери маємо

$$\vec{F}=\frac{C\,\vec{R}}{R^3}=\frac{C\,R\,\vec{n}}{R^3}=\frac{C\,\vec{n}}{R^2},$$

де $\vec{n}$ − нормаль до сфери. Тоді

$$\Pi=\oiint\limits_{\sigma}\frac{C\,\vec{n}\cdot\vec{n}}{R^2}\,d\sigma=\frac{C}{R^2}\oiint\limits_{\sigma}d\sigma=\frac{C}{R^2}4\pi R^2=4\pi C,$$

тобто точка $O(0,\,0,\,0)$ є джерелом з потужністю $4\pi C$.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати теорему Стокса, записати формулу Стокса в векторній формі.

2. Дати інваріантне означення ротора векторного поля.

3. Формула Гріна як наслідок формули Стокса.

4. Довести формулу Остроградського-Гаусса.

5. Формула Остроградського-Гаусса в векторній формі, інваріантне означення потоку векторного поля.

6. Пояснити застосування формул Гріна, Остроградського-Гаусса та Стокса.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського-Гаусса), якщо

$$\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k},\ (p):\quad x+2y+z=2.$$

8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)=(x,y,z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n}=(A,B,C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k},\ (p):\quad 2x+y+3z=6.$$

9. Знайти циркуляцію векторного поля

$$\vec{a} = (x+3y+2z)\vec{i} + (2x+z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$$

по контуру трикутника ABC, де $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,1)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса.

10. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = (y-x)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k}$ через сторону трикутника, утвореного площиною $x+y+z=1$ в першому октанті, двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса.

11. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - 2z\vec{j} + x\vec{k}$ вздовж еліпса, утвореного перетином гіперболоїда $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ площиною $y = x$, в додатному напрямі відносно орта $\vec{i}$, двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса.

12. Застосовуючи формулу Стокса , найти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ по колу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x+y+z=0$.

13. Використовуючи теорему Остроградського-Гаусса, розв'язати наступні задачі.

1) Довести, що потік радіуса-вектора $\vec{r}$ через будь-яку гладку поверхню в напрямі зовнішньої нормалі дорівняє потрійному об'єму тіла, обмеженого цією поверхнею.

2) Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} - z^3\vec{k}$ через всю поверхню куба $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a$ в напрямі зовнішньої нормалі.

14. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = (y-x)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k}$ через сторону трикутника, утвореного площиною $x+y+z=1$ в першому октанті, за формулою Стокса і безпосередньо.

16. Застосовуючи формулу Стокса , знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ по колу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x+y+z=0$.

Частина II. Теорія рядів

Лекція 6. Числові ряди. Ознаки збіжності знакододатних числових рядів

6.1. Поняття числового ряду та його суми.

6.2. Необхідна умова збіжності ряду, дії над рядами.

6.3. Ряди з знакододатними членами. Критерій збіжності, ознаки збіжності.

6.3.1. Ознаки порівняння.

6.3.2. Достатні ознаки збіжності знакододатних числових рядів (ознака Даламбера, радикальна та інтегральна ознаки Коші).

Фактично справу з рядами мали вже стародавні математики. Так, наприклад, Архімед умів знаходити суму геометричної прогресії. У роботах математиків XVIII століття ряди зустрічаються досить часто, проте не завжди звертається увага на питання їх збіжності. Сучасна теорія рядів бере свій початок із робіт німецького математика К. Гаусса, також чеського математика Б. Больцано та французького математика О. Коші. Ряди в математичному аналізі є основним апаратом дослідження функцій. Зокрема, за допомогою рядів можна обчислювати наближені значення функцій. Для початку розглянемо числові ряди.

6.1. Поняття числового ряду та його суми

Нехай задана числова послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$. Вираз

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6.1}$$

називається числовим рядом $[1]$, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – членами ряду. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

S_n будемо називати $n-$*ою часткововою сумою*.

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то її називають *сумою* числового ряду.

Означення. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *збіжним,* якщо існує скінченна границя послідовності часткових сум. Якщо послідовність $\{S_n, n \geq 1\}$ не має скінченної границі, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *розбіжним*.

Ряд $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n$, одержаний з ряду (6.1) відкиданням перших його m членів, називають m-м залишком ряду.

Кожному числовому ряду можна поставити у відповідність послідовність його часткових сум. Тоді питання про збіжність зводиться до дослідження збіжності (розбіжності) числової послідовності. Виявляється, що й навпаки, кожній числовій послідовності можна поставити у відповідність такий числовий ряд, що його часткова сума S_n відповідає загальному члену цієї послідовності. У багатьох випадках досліджувати на збіжність (розбіжність) числовий ряд значно простіше, ніж досліджувати на збіжність (розбіжність) числову послідовність. Числові ряди часто використовуються при розв’язуванні багатьох важливих задач, як теоретичних, так і практичних.

6.2. Необхідна умова збіжності ряду, дії над рядами

Нехай числовий ряд

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

є збіжним. Тоді є збіжною і послідовність його часткових сум, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, але і тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S \ \ (n > 1)$. Знайдемо різницю

$$S_n - S_{n-1} = a_n,$$

звідси $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Отже, дістали таку **необхідну умову збіжності** числового ряду: *для того, щоб числовий ряд збігався, необхідно, щоб*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{6.2}$$

Умова $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ є *необхідною*, але *не достатньою* умовою збіжності ряду, тому на практиці використовують умову розбіжності числового ряду.

Достатня умова розбіжності ряду. Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ або границя не існує, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність (розбіжність) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n}$.

Розв'язування. Будемо використовувати умову розбіжності ряду. Обчислимо границю n-го члена ряду:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n} + \frac{1}{3n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Оскільки границя не дорівнює 0, то ряд розбігається.

Дії над числовими рядами

Нехай маємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і число $c \neq 0$, тоді числовий ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ називають *добутком даного ряду на число*.

Сумою рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ називають числовий ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n),$$

різницею рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ називають числовий ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n).$$

Основні теореми для збіжних числових рядів

1. *Якщо збігається ряд*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

то збіжним є також ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + ...,$$

який отримано з даного ряду відкиданням перших m *членів* (його називають $m-$им залишком початкового ряду); навпаки, *із збіжності* m*-го залишку ряду слідує збіжність початкового ряду*

2. Якщо ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

збіжний і його сумою є число S*, то збіжним є ряд*

$$ca_1 + ca_2 + ca_3 + ...,$$

причому сумою його є число cS.

3. Якщо збігаються ряди

$$a_1 + a_2 + a_3 + ..., \qquad b_1 + b_2 + b_3 + ...,$$

що мають відповідно суми S *и* σ*, тоді також є збіжним ряд*

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + ...,$$

і його сума рівна $S + \sigma$.

Теорема (Критерій Коші збіжності числового ряду). *Для того щоб числовий ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *був збіжний, необхідно й достатньо, щоб для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існував номер* $\mathbb{N}$ *такий, що для всіх* $n > \mathbb{N}$ *і довільного натурального числа р виконувалась нерівність*

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| = \left| a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

6.3. Знакододатні ряди. Критерій збіжності, ознаки збіжності

Числовий ряд $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, в якого всі члени є невід'ємні числа, називають *рядом з знакододатними членами*.

Як і раніше, позначимо часткові суми ряду S_n $(n = 1, 2, ...)$. Тоді, оскільки

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n \quad (n = 1, 2, ...),$$

то послідовність $\{S_n, n \geq 1\}$ є неспадною. Така послідовність, згідно з теоремою про існування границі монотонної послідовності, збігається, якщо вона обмежена зверху, і розбігається, якщо вона не обмежена зверху. Отже, маємо таку теорему.

Теорема Вейєрштрасса. *Нехай члени ряду (6.1) задовольняють умову:* $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$. *Ряд збігається тоді й тільки тоді, коли послідовність його часткових сум* $\{S_n, n \geq 1\}$ *обмежена зверху.*

Усі наступні теореми (ознаки) грунтуються на цій теоремі.

6.3.1. Ознаки порівняння

1. Перша ознака порівняння. *Нехай задані два ряди з знакододатними членами*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{6.3}$$

та

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{6.4}$$

причому кожний член ряду (6.3) не більший відповідного члена ряду (6.4), тобто $u_n \leq v_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. *Тоді із збіжності ряду (6.4) випливає збіжність ряду (6.3), а із розбіжності ряду (6.3) випливає розбіжність ряду (6.4).*

Дана ознака має зміст, якщо нерівність $u_n < v_n$ виконується не для всіх n, а починаючи з деякого номера $k \in \mathbb{N}$.

Доведення.

Можна вважати, що нерівність $u_n \leq v_n$ виконується для всіх $n = 1, 2, \ldots$, бо відкидання скінченного числа перших членів ряду на його збіжність (розбіжність) не впливає. Позначимо часткові суми ряду (6.3) через S_n, а ряду (6.4) через S'_n. Тоді справджуються нерівності

$$S_n \leq S'_n.$$

1) Нехай ряд (6.4) збігається. Тоді його послідовність часткових сум $\{S'_n,\ n \geq 1\}$ за *теоремою Вейєрштрасса* обмежена зверху:

$$S'_n < M, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

За умовою теореми тоді і для послідовності часткових сум ряду (6.3)

$$S_n < M, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

З останнього і теореми Вейєрштрасса випливає, що ряд (6.3) збігається.

2) Нехай ряд (6.3) розбігається. Тоді й ряд (6.4) розбігається, бо, якщо останній був би збіжним, то за доведеним в п. 1) і ряд (6.3) теж був би збіжним. Отже, теорему доведено.

2. Друга ознака порівняння (в граничній формі). *Якщо існує скінченна та не рівна нулеві границя*

$$\lim_{n\to\infty}\left({u_n}/{v_n} \right) = k,$$

тоді два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *одночасно є збіжними або розбіжними.*

Зауваження. При дослідженні рядів на збіжність за допомогою ознак порівняння треба знати, які ряди збіжні і які є розбіжними. Тому на практиці часто використовують ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{збіжний при } |q| < 1, \\ \text{розбіжний при } |q| \geq 1, \end{cases}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\propto}} \begin{cases} \text{збіжний при } \propto > 1, \\ \text{розбіжний при } \propto \leq 1. \end{cases}$$

Перший ряд є *геометричною прогресією*. Другий ряд називається *рядом Діріхле*, або *узагальненим гармонічним рядом*.

6.3.2. Достатні ознаки збіжності знакододатних числових рядів

Ознака Даламбера $[5]$**.** *Якщо для ряду з знакододатними членами* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує*

$$\lim_{n\to\infty}\left({u_{n+1}}/{u_n} \right) = D, \tag{6.5}$$

тоді ряд збіжний при $D < 1$, *при* $D > 1$ *ряд розбігається, а при* $D = 1$ *ознака не дає відповіді на питання про збіжність чи розбіжність ряду.*

Доведення.

Розглянемо випадок, коли $D < 1$. Випадок, коли $D > 1$, доводиться аналогічно.

Візьмемо таке число q, для якого $D < q < 1$. Тоді існує натуральне число $\mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q, \quad \text{або } u_{n+1} < u_n q, \qquad n > \mathbb{N}.$$

Надаючи n значень $\mathbb{N}+1, \mathbb{N}+2, \ldots$ матимемо такі нерівності:

$$u_{N+2} < u_{N+1}q,$$
$$u_{N+3} < u_{N+1}q^2,$$
$$u_{N+4} < u_{N+1}q^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{N+k} < u_{N+1}q^{k-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Бачимо, що члени числового ряду, починаючи з $\mathbb{N}+2$, менші за відповідні члени ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{N+1}q^k.$$

Останній ряд є збіжний як ряд, що є добутком числа і збіжного геометричного ряду, тому і початковий ряд є збіжний.

Теорему доведено.

Зазначимо, що ознаку Даламбера не можна використовувати при $D = 1$. Визначати збіжність (розбіжність) ряду в цьому випадку потрібно за допомогою інших ознак.

Ознака Коші. *Якщо для ряду з додатними членами* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C, \tag{6.6}$$

тоді ряд збігається при $C < 1$, *розбігається при* $C > 1$, *а при* $C = 1$ *ознака не дає відповіді на питання про збіжність чи розбіжність ряду.*

Доведення.

Розглянемо випадок, коли $C < 1$. Випадок, коли $C > 1$, доводиться аналогічно.

Візьмемо таке число q, для якого $C < q < 1$. Тоді існує натуральне число $\mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\sqrt[n]{u_n} < q, \text{ або } u_n < q, \qquad n > \mathbb{N}.$$

Отже, члени ряду, починаючи з u_{N+1}, менші за відповідні члени збіжного геометричного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n,$$

в якого знаменник $q < 1$. Тому і початковий ряд за ознакою порівняння є збіжний.

Зауваження. За ознакою Коші (в радикальній формі), як і за ознакою Даламбера, не можна встановити збіжність (розбіжність) ряду у випадку існування границі і її рівності 1. У цьому випадку ряд може збігатися, може й розбігатися. Тоді треба досліджувати за допомогою інших ознак.

Інтегральна ознака (Коші). *Якщо функція* $f(x)$ *визначена в проміжку* $1 \le x < +\infty$ *і при* $x \ge a \ge 1$ *неперервна, додатна і спадна, то для того щоб збігався числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots,$$

необхідно і достатньо, щоб збігався невласний інтеграл

$$\int_a^{\infty} f(x)dx.$$

Доведення.

Розглянемо натуральні числа $k, k+1, \ldots, k+n, \ldots,$ де $k \ge a$. Тоді на відрізку $[k,\ k+1]$ функція, згідно з теоремою, спадає. Тому для $x \in [k,\ k+1]$ справджуються нерівності

$$f(k+1) \le f(x) \le f(k).$$

За відомою властивістю для визначеного інтеграла тоді теж виконуються нерівності

$$\int_{k}^{k+1} f(k+1)dx \le \int_{k}^{k+1} f(x)dx \le \int_{k}^{k+1} f(k)dx,$$

$$f(k+1) \le \int_{k}^{k+1} f(x)dx \le f(k).$$

Ці нерівності справедливі для будь-якого $k = n, n+1, \dots, n+m, \dots$. Тому, надаючи k значень $n, n+1, \dots, n+m$, матимемо

$$f(n+1) \le \int_{n}^{n+1} f(x)dx \le f(n),$$

$$f(n+2) \le \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx \le f(n+1),$$

………………………………………..

$$f(n+m+1) \le \int_{n+m}^{n+m+1} f(x)dx \le f(n+m).$$

Додамо почленно ці нерівності:

$$f(n+1) + f(n+2) + \dots + f(n+m+1) \le \int_{n}^{n+m+1} f(x)dx \le$$

$$\le f(n) + f(n+1) + \dots + f(n+m),$$

з яких і випливає справедливість теореми.

Справді, нехай невласний інтеграл збігається. Тоді при $x \ge a$

$$\int_{n}^{n+m+1} f(x)dx \le \int_{a}^{\infty} f(x)dx,$$

відповідно

$$f(n+1) + f(n+2) + \dots + f(n+m+1) \le \int_{a}^{\infty} f(x)dx,$$

тобто часткова сума залишку числового ряду є обмеженою, тому ряд збігається.

Доведення у випадку розбіжного невласного інтеграла проводиться від супротивного.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, якщо:

а) $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$; б) $a_n = \dfrac{1}{n \ln^\alpha n}$, $n > 2$.

Розв'язування.

а) Якщо $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, то функція $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ — неперервна, невід'ємна й спадна на проміжку $[1, +\infty)$. Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ збіжний або розбіжний одночасно з невласним інтегралом $\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$. Обчислимо його

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^A = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1, \\ \infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Якщо $\alpha = 1$, то $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_1^A \dfrac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{A \to +\infty} \ln x \Big|_1^A = \infty$.

Якщо $\alpha \le 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ розбігається, оскільки в цьому випадку не виконується необхідна умова збіжності ряду.

Отже, даний ряд збігається для $\alpha > 1$ і розбігається для $\alpha \le 1$.

б) Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^\alpha x}$ для $x \ge 2$. Вона неперервна й додатна на проміжку $[2, +\infty)$, спадна при $\alpha > 0$. Отже, при $\alpha > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^\alpha n}$ збіжний або розбіжний одночасно з невласним інтегралом $\int_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x \ln^\alpha x}$.

$$\lim_{A \to +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \begin{vmatrix} \ln x = y \\ x = e^y \\ dx = e^y dy \end{vmatrix} = \lim_{A \to +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{dy}{y^\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \frac{y^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_{\ln 2}^{\ln A} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Якщо $\alpha = 1$, то

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{A \to +\infty} \int_2^A \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{A \to +\infty} \ln(\ln x) \Big|_2^A = +\infty .$$

Якщо $\alpha < 1$, то $\frac{1}{n \ln^{\alpha} n} > \frac{1}{n}$. Отже, ряд розбігається. Таким чином, досліджуваний ряд збігається для $\alpha > 1$ і розбігається для $\alpha \le 1$.

Завдання для самоконтролю

1. Числовий ряд, поняття його загального члена, часткової суми, залишку ряду.
2. Збіжність числового ряду. Навести приклади обчислення суми числового ряду.
3. Необхідна умова збіжності числового ряду, достатня умова розбіжності ряду, навести приклади використання цієї умови.
4. Сформулювати і пояснити критерій Вейєрштрасса збіжності числового ряду з додатними членами.
5. Сформулювати достатні ознаки порівняння для дослідження на збіжність числового ряду. Навести приклади.
6. Ознака Даламбера, її доведення та застосування на прикладах.
7. Довести радикальну ознаку Коші, використати її на прикладах.
8. Дослідити на збіжність гармонічний ряд за інтегральною ознакою Коші.
9. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{8n+3}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+4}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n(n^2+25)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{10^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{2}{n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2+25}{3n^2-2}\right)^n$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^5 n}$.

Лекція 7. Ряди з довільними членами та функціональні ряди

7.1. Збіжність рядів з довільними членами.

7.2. Основні поняття для функціонального ряду.

7.3. Основні теореми для функціонального ряду.

7.3.1. Критерій Вейєрштрасса.

7.3.2. Властивості суми рівномірно збіжного функціонального ряду.

Функціональні ряди використовують при розв'язуванні практичних задач, які можуть бути розв'язані лише наближено. Також є важливим поняття збіжності числових рядів з довільними членами, як функціональних рядів в окремо взятій точці.

7.1. Збіжність рядів з довільними членами

Означення. Числовий ряд виду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^n u_n + \ldots, \tag{7.1}$$

де $u_n > 0\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$, називають *знакопереміжним* рядом.

Теорема (ознака Лейбніца). *Знакопереміжний ряд збіжний, якщо абсолютні величини його членів монотонно не зростають, а загальний член прямує до нуля, тобто:*

$$1)\ u_{n+1} \le u_n, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Доведення.

Часткові суми ряду позначимо через S_n. Тоді, поклавши $n = 2m$ ($m =$ *1, 2,...,* дістанемо

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Кожна різниця в дужці є невід'ємне число, тому послідовність $\{S_{2m}, m \geq$ *1* є монтонно неспадна. Перепишемо останню рівність в іншому вигляді:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Звідси і з нерівності $u_{n+1} \leq u_n$ випливає, що

$$S_{2m} \leq u_1.$$

Отже, послідовність часткових сум з парними номерами, будучи неспадною і обмеженою зверху, є збіжною (існує її границя) і позначимо

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m} = S.$$

Розглянемо тепер часткові суми з непарними номерами $S_{2m-1,}$ які можна записати у вигляді:

$$S_{2m-1} = S_{2m} + u_{2m.}$$

Обчислимо границю, врахувавши умову

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m-1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2m} + u_{2m}) = S.$$

Таким чином, послідовність парних і непарних часткових сум збігається до того самого числа S. Це означає, що знакопереміжний ряд є збіжний і його сума дорівнює S.

Теорему доведено.

Наслідок *(з теореми Лейбніца). Якщо знакопереміжний ряд задовольняє умови теореми Лейбніца, то* n*-й залишок його має знак першого члена і за модулем на перевищує модуля цього члена*.

Цей наслідок використовують при застосуванні рядів до наближених обчислень.

Деякі властивості знакопереміжних рядів та рядів з довільним чергуванням знаків.

1) Знакозмінний ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

збіжний, якщо є збіжним ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

В цьому випадку початковий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *абсолютно збіжним.*

Збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називають *умовно збіжним*, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбіжний.

2) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно збіжний, то ряд, утворений будь-якою перестановкою нескінченної множини його членів, абсолютно збіжний і має ту саму суму, що і початковий ряд (умова абсолютної збіжності є суттєвою).

3) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ умовно збіжний, то при перестановці нескінченної множини його членів його сума може змінитись. Зокрема, при відповідній перестановці членів умовно збіжний ряд можна перетворити в розбіжний ряд.

4) Якщо два числові ряди

$$u_1 + u_2 + u_3 + ..., \quad v_1 + v_2 + v_3 + ...$$

збіжні абсолютно та мають відповідно суми S_1 і S_2, тоді є абсолютно збіжним ряд

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + v_1u_2) + \left(u_1v_3 + v_2u_2 + u_3v_1\right) + \ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + ... + u_nv_1) + \ldots .$$

Цей ряд називають *добутком рядів* (за Коші). Його сума також відповідно дорівнює добутку сум S_1S_2.

7.2. Основні поняття для функціонального ряду

Нехай на множині X задана послідовність числових функцій $\{u_n(x), \quad n \geq 1\}$.

Множина всіх числових сум $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... + u_n(x) + ...,$ або

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{7.2}$$

в кожному з яких точка $x \in X$ фіксована, називається *функціональним рядом* на множині X, а функції в ряді – його членами.

Множину значень x, для яких функції $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x),...$ визначені та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається, називають *областю збіжності* функціонального ряду.

Областю збіжності функціонального ряду найчастіше є проміжок осі OX. Кожному значенню x із області збіжності X відповідає значення величини $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, яку називають *сумою функціонального ряду* і позначають $S(x)$.

Суму ряду записують у вигляді $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$,

де

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x), \quad R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

($S_n(x)$ – n-та часткова сума, а $R_n(x)$ – залишок функціонального ряду).

Якщо ряд (7.2) збігається для довільного фіксованого $x \in X$ абсолютно, тоді його називають *абсолютно збіжним* рядом на множині X.

Означення. Збіжний функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називають *рівномірно збіжним* у деякій області $E \in X$, якщо для кожного достатньо малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке ціле додатне число $\mathbb{N}$, що при $n \geq \mathbb{N}$ виконується нерівність $|R_n(x)| < \varepsilon$ для кожного x із області X.

7.3. Основні теореми для функціонального ряду

7.3.1. Критерій Вейєрштрасса

Теорема (достатня ознака рівномірної збіжності – *ознака Вейєрштрасса* [1]). *Якщо функції* $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ *за абсолютною величиною не перевищують в деякій області* $E \in X$ *відповідні члени збіжного числового ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

тоді функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

в цій області збігається рівномірно.

Доведення.

Нехай для всіх точок $x \in E$ виконуються нерівності

$$|u_n(x)| \leq a_n, n = 1, 2, \ldots$$

Звідси і з умови теореми випливає, що ряд на множині E абсолютно збіжний, а, отже, він на цій множині збіжний.

Запишемо n-й залишок для числового ряду

$$r'_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} + \cdots$$

Оскільки числовий ряд збігається, то

$$\lim_{n\to\infty} r'_n = 0.$$

Це означає, що для будь-якого достатньо малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке ціле додатне число $\mathbb{N}(\varepsilon)$, яке не залежить від точок $x \in E$, що при $n \geq \mathbb{N}(\varepsilon)$ виконується нерівність $r'_n < \varepsilon$.

Тоді для всіх $n \geq \mathbb{N}(\varepsilon)$ і $x \in E$ виконуються співвідношення

$$|r_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+k}(x) + \cdots| \leq$$
$$\leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots + |u_{n+k}(x)| + \cdots \leq$$
$$\leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} + \cdots < \varepsilon.$$

Теорему доведено.

Зауваження. Збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, який задовольняє умови теореми Вейєрштрасса, називається *мажорантним рядом* для функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

7.3.2. Властивості суми рівномірно збіжного функціонального ряду

Теорема 1. *Сума* $S(x)$ *рівномірно збіжного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *в області* $E \in X$, *де* $u_n(x), n \in \mathbb{N}$ *− неперервні функції, також є неперервною функцією.*

Доведення.

Нехай функції $u_n(x), n \in \mathbb{N}$ − неперервні в точці $x_0 \in X$, тоді розглянемо приріст $x_0 + \Delta x \in X$ і відповідно для суми ряду маємо рівності:

$$S(x_0) = S_n(x_0) + r_n(x_0);$$
$$S(x_0 + \Delta x) = S_n(x_0 + \Delta x) + r_n(x_0 + \Delta x).$$

Для приросту функції в точці $x_0 \in X$ маємо

$$\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0) = S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) + r_n(x_0 + \Delta x) - r_n(x_0) =$$

$$= \Delta S_n + r_n(x_0 + \Delta x) - r_n(x_0).$$

Звідси

$$|\Delta S| \le |\Delta S_n| + |r_n(x_0 + \Delta x)| + |r_n(x_0)| \le |\Delta S_n| + r_n + r_n,$$

де r_n – залишок мажорантного ряду.

Задамо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки мажорантний ряд збігається, то

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \to 0$$

при $n \to \infty$. Тоді для даного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $\mathbb{N} = \mathbb{N}(\varepsilon)$, що для всіх $n > \mathbb{N}$ виконується нерівність $r_n < \varepsilon/3$. Зафіксуємо одне з таких n, яке позначимо n_0. Оскільки $S_n(x)$ неперервна на множині X і в точці $x_0 \in X$, тоді існує таке число $\delta > 0$, що для всіх $|\Delta x| < \delta$ виконується нерівність:

$$|\Delta S_n| < \varepsilon/3.$$

Отже, для $|\Delta x| < \delta$ маємо:

$$|\Delta S| \le |\Delta S_n| + r_n + r_n \le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

що і доводить неперервність суми функціонального ряду $S\,(x)$.

Інтегрування та диференціювання функціональних рядів

Теорема 2. *Якщо ряд*

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

де $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ *- неперервні функції, рівномірно збіжний в деякій області* X *і має суму* $S(x)$*, тоді ряд*

$$\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)dx + \ldots$$

збіжний і має суму $\int_a^b S(x)dx$ (проміжок $[a, b]$ належить області X).

Доведення.

Функція $S(x)$, як сума функціонального ряду, є інтегровною на відрізку $[a, b]$ (випливає із теореми 1). Залишається довести рівність

$$\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)dx + \cdots \; = \int_a^b S(x)dx$$

Скористаємось рівністю $S(x) = S_n(x) + r_n(x)$, з якої випливає, що $r_n(x)$ є також інтегровною на відрізку $[a, b]$. Крім цього, для рівномірно збіжного ряду і для числа $\frac{\varepsilon}{b-a}$ $(\varepsilon > 0)$ існує таке натуральне число $\mathbb{N} = \mathbb{N}(\varepsilon)$, що для всіх $n > \mathbb{N}$ та $x \in [a, b]$ виконується нерівність:

$$r_n(x) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тому

$$\left|\int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |r_n(x)|dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot x\Big|_a^b = \varepsilon,$$

тобто при $n > \mathbb{N}(\varepsilon)$ маємо нерівність

$$\left|\int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right| < \varepsilon,$$

з якої випливає існування границі

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx.$$

Підставимо в останню рівність значення $S_n(x)$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)dx\right) = \int_a^b S(x)dx.$$

Теорему доведено.

Зауваження. Теорему 2 формулюють ще таким чином: *рівномірно збіжний на відрізку* $[a, b]$ *ряд, складений з неперервних функцій, можна на цьому відрізку почленно інтегрувати.*

Теорема 3. (*Теорема про почленне диференціювання функціонального ряду).* *Нехай функції* $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ *визначені в деякій області* X, *мають у цій області неперервні похідні*

$$u_1'(x), u_2'(x), \ldots, u_n'(x), \ldots.$$

Якщо в даній області ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *збігається, а ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *збігається рівномірно, то сума ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *дорівнює похідній від суми початкового ряду:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)'.$$

Приклад. Довести, що функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^{n-1}} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^{n-1}} + \dots$$

збігається рівномірно для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$.

Доведення. Для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$ члени функціонального ряду задовольняють нерівність

$$\left| \frac{\sin nx}{2^{n-1}} \right| \le \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Додатний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

збігається як геометричний ряд, в якого знаменник $q = \frac{1}{2} < 1$. Тому, згідно з ознакою Вейєрштрасса, функціональний ряд збігається рівномірно на всій числовій осі.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати та довести ознаку Лейбніца. Для яких рядів можна застосувати її?
2. Умовно збіжний числовий ряд, навести приклади.
3. Абсолютно збіжний числовий ряд, навести приклади.
4. Наслідок ознаки Лейбніца, навести приклади його використання до наближених обчислень.
5. Сформулювати основні поняття, пов’язані з функціональними рядами.

6. Дати означення області збіжності функціонального ряду. Знайти її для рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}; \sum_{n=1}^{\infty} \ln^{n} x.$$

7. Дати пояснення збіжного, рівномірно збіжного функціонального ряду.

8. Сформулювати і довести ознаку Вейєрштрасса.

9. Сформулювати і пояснити властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

10. Довести теорему про почленне диференціювання функціонального ряду.

11. Довести, що ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

рівномірно збіжні на всій числовій осі.

12. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{(n+2)\cdot 7^n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^4}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{3n-5}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{5^n \cdot n!}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+4)\ln(n+4)}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+25}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{3n}{11n+5}$;

8) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n-1)}$.

Лекція 8. Степеневі ряди, їх застосування

8.1. Область збіжності степеневого ряду. Теорема Абеля.

8.2. Розклад функції в степеневі ряди. Ряд Тейлора.

8.3. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.

8.3.1. Наближені обчислення значень функцій.

8.3.2. Наближене обчислення визначених інтегралів.

8.3.3. Наближене інтегрування диференціальних рівнянь.

Степеневі ряди широко використовують в теоретичних дослідженнях та наближених обчисленнях. Зокрема, в поліграфічних технологіях, різноманітність технологічних процесів вимагає постійного пошуку задання та дослідження функцій з використанням розкладу в ряд Тейлора і обмеженням певною кількістю членів. Наприклад, в [16], де виписані три перших члени розкладу для e^{-2Dy} в ряд Тейлора, отримано час руху верхньої заготовки від стопи до периферії фрикційних дисків під присмоктуючою дією струменів. В роботі [15], із врахуванням нелінійності, функцію розкладено в степеневий ряд, проведено дослідження нових функціональних можливостей подачі картонних заготовок і розв'язана задача створення компактного пристрою для виготовлення розгорток паковання з картонної стрічки.

8.1. Область збіжності степеневого ряду. Теорема Абеля

Нехай $\{a_n, n \geq 1\}$ − послідовність дійсних чисел, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Означення. *Степеневим рядом* з центром в точці x_0 називається функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8.1}$$

де числа $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ називають *коефіцієнтами* ряду .

Також будемо розглядати ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8.2}$$

з центром в точці 0, дослідження збіжності якого еквівалентно дослідженню збіжності початкового ряду .

Розглянемо приклади знаходження області збіжності степеневого ряду.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$:

а) $a_n(x) = \dfrac{1}{n!} x^n$; б) $a_n(x) = n!\, x^n$.

Розв'язування.

а) Згідно з ознакою Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1} n!}{(n+1)!\, x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отже, ряд збігається на $\mathbb{R}$.

б) Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(n+1)!}{n!\, x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty, \quad |x| \neq 0,$$

тобто ряд збігається в одній точці $x = 0$.

Будь-який степеневий ряд вигляду (8.1) збігається в точці $x = 0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку. Наступна теорема дасть змогу знайти і інші точки числової осі, в яких ряди (8.1), (8.2) збігаються.

Теорема Абеля. *Якщо степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}$, *збіжний при* $x = x_0 \neq 0$, *то він збіжний (і при тому абсолютно) при всіх значеннях змінної таких, що* $|x| < |x_0|$. *Якщо даний ряд розбіжний при* $x = x_1 \neq 0$, *то він розбіжний для всіх* $|x| > |x_1|$.

Доведення.

Нехай ряд збігається в точці x_0. Тоді для числового ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x_0^n$$

виконується необхідна умова збіжності, тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0,$$

але тоді $a_n x_0^n$ є обмеженою величиною:

$$|a_n x_0^n| < M, n \in \mathbb{N}.$$

Враховуючи $x_0 \neq 0$, дістаємо нерівність

$$|a_n| < \frac{M}{|x_0|^n}.$$

Беручи до уваги останню нерівність, матимемо оцінку для загального члена степеневого ряду

$$|a_n x^n| = |a_n||x|^n < M\left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n, n \in \{0, 1, \dots\}.$$

Нехай $|x| < |x_0|$. Введемо позначення

$$q = \frac{|x|}{|x_0|} < 1$$

і складемо геометричний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Цей ряд збігається. Тоді збігається й ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n.$$

Отже, із збіжності останнього ряду і нерівностей-оцінки загального члена степеневого ряду випливає, що степеневий ряд є абсолютно збіжний для будь-якого x, який задовольняє умову $|x| < |x_0|$.

Першу частину теореми доведено. Справедливість другої частини випливає із доведеного вище.

Справді, візьмемо довільне число x_2 таке, що $|x_2| > |\, x_1|$. Тоді, якщо степеневий ряд збігався б у точці x_2, то, за доведеним вище, він збігався б і в точці x_1 – прийшли до суперечності.

Теорему доведено.

Теорема Абеля дає можливість побудови області збіжності степеневого ряду.

Властивості суми степеневого ряду

Теорема 1. *Степеневий ряд рівномірно збігається на будь-якому відрізку, що знаходиться всередині інтервалу збіжності.*

Доведення.

Нехай степеневий ряд збігається в інтервалі $(-R,\ R)$. Візьмемо додатне число $0 < r < R$. Тоді для всіх $x \in [-r, r]$ справджується нерівність

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n, n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

всередині інтервалу збіжності збігається абсолютно і $r < R$, то числовий додатний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

збігається. Тоді степеневий ряд на відрізку $[-r, r] \subset (-R,\ R)$ збігається рівномірно.

Властивість 1. *Сума степеневого ряду всередині інтервалу збіжності є функція неперервна.*

Властивість 2. *Сума степеневого ряду на будь-якому відрізку $[-r, r]$, що міститься всередині інтервалу збіжності $(-R,\ R)$, є функція інтегровна і визначений інтеграл від неї можна отримати почленним інтегруванням даного ряду.*

Властивість 3. *Сума степеневого ряду є функція, диференційовна в кожній точці інтервалу збіжності, і похідну від неї можна дістати почленним диференціюванням даного ряду.*

Теорема 2. *Сума $f(x)$ степеневого ряду всередині інтервалу збіжності має похідну будь-якого порядку $f^k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, і цю похідну можна дістати почленним диференціюванням відповідне число разів ряду. Причому, всі ряди, які утворюються почленним диференціюванням, мають інтервал збіжності* $(-R, R)$.

У випадку, коли існує $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, для знаходження *радіуса збіжності* степеневого ряду (випливає із радикальної Коші) застосовують формулу

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

з якої радіус збіжності степеневого ряду (2) отримують у вигляді

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Якщо (випливає із ознаки Даламбера) існує $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, то

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Інтервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ називається *інтервалом збіжності*, а R − *радіусом збіжності* ряду. Якщо $R = 0$, то ряд збігається при $x = x_0$; якщо $R = +\infty$, то при всіх $x \in \mathbb{R}$.

Для дослідження степеневого ряду на збіжність потрібно знайти його інтервал збіжності і дослідити збіжність цього ряду на кінцях його інтервалу збіжності.

Приклад 2. Знайти область збіжності степеневого ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^4}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^{3n}$.

Розв'язування.

а) За формулою знаходимо радіус збіжності ряду $R = 1$. Ряд збігається абсолютно при $|x - 3| < 1$, тому інтервал збіжності ряду − (2, 4). Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу.

При $x=2$ одержимо абсолютно збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$, а при $x=4$ – збіжний ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. Отже, область збіжності заданого степеневого ряду є відрізок $[2, 4]$.

б) Позначимо $2x^3=t$, тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n .$$

Одержаний ряд збігається , якщо $|t|<1$, і розбігається при $|t|>1$. Таким чином, досліджуваний ряд збігається, якщо $2|x|^3<1$, тобто при $|x|<1/\sqrt[3]{2}$, і розбігається при $|x|>1/\sqrt[3]{2}$. Радіус збіжності ряду $r=1/\sqrt[3]{2}$.

У точках $x=\pm 1/\sqrt[3]{2}$ даний ряд розбігається. Областю збіжності ряду є інтервал $\left(-1/\sqrt[3]{2},\ 1/\sqrt[3]{2}\right)$.

8.2. Розклад функції в степеневі ряди. Ряд Тейлора

Позначимо $C^{(\infty)}\left(x_0-r, x_0+r\right)$ – множину функцій, які мають похідні будь-якого порядку на інтервалі $\left(x_0-r, x_0+r\right)$. Нехай $x_0\in\mathbb{R}$, $0<r<+\infty$ і функція $f(x)\in C^{(\infty)}\left(x_0-r, x_0+r\right)$.

Степеневий ряд

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (8.3)$$

називається *рядом Тейлора* функції $f(x)$ в околі точки x_0.

Якщо $x_0=0$, то ряд називається *рядом Маклорена*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n. \qquad (8.4)$$

Довільна функція $f(x)\in C^{(\infty)}\left(x_0-r,\quad x_0+r\right)$ може бути розвинена на цьому інтервалі в збіжний до неї ряд Тейлора (3.3), якщо в цьому інтервалі залишковий член формули Тейлора

$$R_n(x)=f(x)-\left[f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right]\to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Теорема. *Якщо в деякому околі точки $x=0$ функція $f(x)$ має похідні будь-якого порядку та існує число $M>0$ таке, що виконуються нерівності*

$$\left|f^k(x)\right|\leq M, k\in\mathbb{N},$$

то $f(x)$ у цьому околі розкладається в ряд Тейлора.

Розвинення основних елементарних функцій в ряд Маклорена:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in\mathbb{R}; \qquad (8.5)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in\mathbb{R}; \qquad (8.6)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in\mathbb{R}; \qquad (8.7)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad -1<x\leq 1; \qquad (8.8)$$

$$\mathrm{arctg}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)},\quad -1\leq x\leq 1; \qquad (8.9)$$

$$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n. \qquad (8.10)$$

Розклад (8.10) має місце в таких випадках: при $m\geq 0$, якщо $x\in[-1;1]$, при $-1<m<0$, якщо $x\in(-1,1)$, при $m\leq 1$, якщо $x\in(-1,1)$.

Окремі випадки формули (8.10):

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad -1<x<1; \qquad (8.11)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad -1<x<1. \tag{8.12}$$

Отримання деяких розвинень елементарних функцій в ряд Тейлора

1) Ряд Тейлора для функції e^x

Функція $f(x)=e^x$ в кожній точці числової осі має похідну будь-якого порядку, причому

$$f^k(x)=e^x, k\in\mathbb{N}.$$

Підставивши $x=0$, маємо

$$f^k(x=0)=e^0=1, k\in\mathbb{N}.$$

Тоді ряд Тейлора має вигляд:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Доведемо, що ряд при будь-якому збігається до e^x. Візьмемо довільне число $h>0$. Тоді для всіх $|x|\le h$

$$\left|f^k(x)\right| \le e^h, k\in\mathbb{N}.$$

Отже, всі похідні для $|x|\le h$ обмежені тим самим числом $M=e^h$. Тому ряд на проміжку $[-h,h]$ збігається до функції e^x. Оскільки для будь-якого $x\in\mathbb{R}$ можна підібрати число $h>0$ таке, що $|x|\le h$, то ряд Тейлора збігається до функції e^x в кожній точці числової осі, тобто

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

2) Ряд Тейлора для функції $\cos x$

Функція $f(x)=\cos x$ при будь-якому $x\in\mathbb{R}$ має похідні всіх порядків, причому

$$\left|f^k(x)\right| = \left|\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1, k\in\mathbb{N}.$$

Нехай $x=0$. Тоді

$$f^k(0)=\cos k\frac{\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^n, якщо\ k=2n,\\ 0, якщо\ k=2n-1, n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Отже, ряд Тейлора для функції $\cos x$ має вигляд:

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots$$

Оскільки для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$\left|f^k(x)\right| = \left|\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1, k \in \mathbb{N}.$$

то даний ряд збігається для всіх числових значень до $\cos x$, тобто справджується рівність

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots.$$

8.3. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

8.3.1. Наближені обчислення значень функцій. Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд в інтервалі $(-R,\ R)$ і значення $x_0 \in (-R,\ R)$, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$, а наближене – частинній сумі $S_n(x_0)$. Похибку $|f(x_0) - S_n(x_0)|$ можна знайти, оцінюючи залишок ряду $R_n(x_0)$. Для рядів лейбніцевого типу (виконуються умови ознаки Лейбніца)

$$|R_n(x_0)| = |u_{n+1}(x_0) + u_{n+2}(x_0) + u_{n+3}(x_0) + \cdots| < |u_{n+1}(x_0)|.$$

Для знакозмінних і знакододатних рядів величину $R_n(x_0)$, як правило, оцінюють так:

$$|R_n(x_0)| \le |u_{n+1}(x_0)| + |u_{n+2}(x_0)| + |u_{n+3}(x_0)| + \cdots <$$
$$< a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S,$$

де ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

є певний знакододатний збіжний ряд, сума якого S легко обчислюється (наприклад, геометрична прогресія), і для якого

$$|u_{n+1}(x_0)| \le a_1, |u_{n+2}(x_0)| \le a_2, |u_{n+3}(x_0)| \le a_3, \dots .$$

Зауваження . Для обчислення натуральних логарифмів застосовувати ряд (8.8) нераціонально, оскільки він збігається досить повільно. Користуються наближеною формулою

$$\ln(m+1) \approx \ln m +$$

$$+2\left[\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{3(2m+1)^3} + \frac{1}{5(2m+1)^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2m+1)^{(2n-1)}}\right].$$

8.3.2. Наближене обчислення визначених інтегралів. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,\ b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку, тобто існує визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Але цей інтеграл не завжди можна обчислити за допомогою формули Ньютона-Лейбніца, бо не в усіх випадках первісна функція для $f(x)$ є елементарною. У цьому разі для обчислення таких визначених інтегралів застосовують степеневі ряди.

Справді, нехай $f(x)$ розкладена в степеневий ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

причому відрізок $[a,\ b]$ знаходиться всередині, де справджується розвинення функції в степеневий ряд. Тоді степеневий ряд на відрізку $[a,\ b]$ можна почленно інтегрувати, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = a_0 \int_a^b dx + a_1 \int_a^b xdx + a_2 \int_a^b x^2 dx + \cdots + a_n \int_a^b x^n dx + \cdots.$$

Звідси дістаємо

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n b^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n a^{n+1}}{n+1}.$$

Похибку обчислень визначають так само, як і при обчисленні наближених значень функцій.

8.3.3. Наближене інтегрування диференціальних рівнянь. Якщо інтегрування диференціального рівняння не зводиться до квадратур, то для наближеного інтегрування можна скористатись рядом Тейлора.

Нехай треба знайти частинний розв'язок $y(x)$ рівняння

$$y' = f(x, y),$$

який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Припустимо, що розв'язок $y(x)$ рівняння в околі точки x_0, в якій задані початкові умови, можна розкласти в ряд

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$

$$+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots. \qquad (8.13)$$

Потрібно знайти $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \ldots$. Значення $y(x_0) = y_0$ є початковою умовою. Щоб знайти $y'(x_0) = y'_0$, в диференціальному рівнянні треба покласти $x = x_0, y = y_0$. Похідну $y''(x_0) = y''_0$ знаходимо диференціюванням рівняння за змінною x:

$$y'' = f_1(x, y, y'),$$

поклавши в цьому рівнянні $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0$. Аналогічно, послідовним диференціюванням останнього рівняння і підстановкою отриманих значень похідної, обчислюють наступні коефіцієнти. Процес або обривається на деякому коефіцієнті, або завершується знаходженням загального закону їх побудови.

Зауваження. За формулою (8.13) можна знаходити наближений розв'язок $y(x)$ рівняння будь-якого порядку:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Приклади застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Приклад 3. Обчислити $\cos 5°$ з точністю до 10^{-4}.

Розв'язування. Спочатку переведемо градусну міру в радіанну:

$$\frac{2\pi}{360} \cdot 5 = \frac{\pi}{36}.$$

Скориставшись формулою (8.6) , матимемо

$$\cos 5^\circ = \cos\frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n-2},$$

при цьому $\left|r_n(x)\right| \le \dfrac{1}{(2n)!}\left(\dfrac{\pi}{36}\right)^{2n}$.

Знайдемо найменше значення *n* таке, щоб справджувалася нерівність

$$\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n} < 10^{-5}.$$

Оскільки $\dfrac{\pi}{36} < 0{,}1$, то попередня нерівність виконуватиметься, якщо буде

справедлива нерівність $\dfrac{1}{(2n)!\cdot 10^{2n}} < 10^{-5}$. Легко бачити, що при $n = 2$

$$\frac{1}{(2n)!\cdot 10^{2n}} = \frac{1}{4!\cdot 10^{4}} < 10^{-5}.$$

Отже, достатньо взяти два перших доданки, тобто

$$\cos 5^\circ = \cos\frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2.$$

Підставивши в останню формулу замість $\pi = 3{,}14159$, дістанемо значення $\cos 5^\circ$ з чотирма певними цифрами

$$\cos 5^\circ \approx 0{,}99619.$$

Приклад 4. Обчислити з точністю до 10^{-4} визначений інтеграл

$$\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx.$$

Розв'язування. Первісна функція для $f(x) = \sqrt[3]{1+x^3}$ не є елементарною. Застосувати формулу Ньютона-Лейбніца не можна. Проте підінтегральна функція $f(x) = \sqrt[3]{1+x^3}dx$ за допомогою біномного ряду для $|x| < 1$ зображується у вигляді

$$\sqrt[3]{1+x^3} = 1 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2!}\frac{2}{3^2}x^6 + \frac{1}{3!}\frac{2\cdot 5}{3^3}x^9 - \frac{1}{4!}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^4}x^{12} + \dots +$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-4)}{n!\cdot 3^n}x^{3n} + \dots .$$

Тоді

$$\int_0^{1/2}\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\int_0^{1/2}dx+\frac{1}{3}\int_0^{1/2}x^3dx-\frac{1\cdot 2}{2!\cdot 3^2}\int_0^{1/2}x^6dx+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3!\cdot 3^3}\int_0^{1/2}x^9dx-$$

$$-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{4!\cdot 3^4}\int_0^{1/2}x^{12}dx+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-4)}{n!\cdot 3^n}\int_0^{1/2}x^{3n}dx+\cdots.$$

Після обчислення інтегралів маємо

$$\int_0^{1/2}\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4\cdot 2^4}-\frac{1\cdot 2}{2!\cdot 3^2}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3!\cdot 3^3}\cdot\frac{1}{10\cdot 2^{10}}-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{4!\cdot 3^4}\cdot\frac{1}{13\cdot 2^{13}}+\cdots+$$

$$+\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-4)}{n!\cdot 3^n}\cdot\frac{1}{(3n+1)\cdot 2^{3n+1}}+\cdots.$$

Записаний числовий ряд без першого члена в правій частині рівності є знакозмінний і тому n-й залишок за модулем менший від модуля першого свого члена.

Розглянемо четвертий член $\dfrac{1}{3!\cdot 3^3\cdot 2^{10}}<10^{-5}$, він задовольняє вказану в умові точність. Тому, взявши в ряді перші три члени, дістанемо

$$\int_0^{1/2}\sqrt[3]{1+x^3}\,dx\approx 0{,}50309,$$

причому перші чотири цифри певні.

Приклад 5. Знайти 5 членів розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння

$$4x^2y''+y=0,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=\tfrac{1}{2}.$$

Розв’язування. Розв’язок даного рівняння записують у вигляді ряду

$$y=y(1)+\frac{y'(1)}{1!}(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{y^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4+\cdots,$$

$$y(1)=1,\quad y'(1)=\frac{1}{2};$$

$$y''(x)=-\frac{y}{4x^2},\quad y''(1)=-\frac{1}{4};$$

$$y'''(x) = -\frac{y'x^2 - 2xy}{4x^4}, \quad y'''(1) = -\frac{\left(1/2\right)\cdot 1 - 2}{4} = \frac{3}{8};$$

$$y^{IV}(x) = -\frac{\left(y''x^2 + 2xy' - 2y - 2xy'\right)x^4 - 4x^3\left(y'x^2 - 2xy\right)}{4x^8}, \quad y^{IV}(1) = -\frac{15}{16}.$$

Підставивши отримані значення похідної в ряд, записують наближений розв'язок диференціального рівняння:

$$y(x) \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4\cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{3}{8\cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{15}{16\cdot 4!}(x-1)^4,$$

$$y(x) \approx 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} - \frac{5(x-1)^4}{128}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати основні поняття, пов'язані з степеневими рядами.
2. Сформулювати основні властивості степеневого ряду.
3. Теорема Абеля, її практичне застосування.
4. Користуючись ознакою Даламбера, отримати формулу обчислення радіуса збіжності степеневого ряду.
5. Навести приклади знаходження області збіжності степеневого ряду.
6. Ряди Тейлора (Маклорена), достатні умови розкладання функції в такі ряди.
7. Розкласти в ряд Маклорена функції $y = \sin x,\ y = \ln(1 + x)$.
8. Навести приклади застосування степеневих рядів в наближених обчисленнях.
9. Навести приклади використання рядів Тейлора (Маклорена) в поліграфічних технологіях.
10. Знайти область збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{(x-2)^n\cdot 3^{n-1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 8^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$.

11. За допомогою розкладу підінтегральної функції в ряд за степенями x обчислити наближено визначені інтеграли з точністю до 0,001:

1) $\int\limits_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\sin x\,dx$; 3) $\int\limits_0^2 \frac{\operatorname{sh}^2 x}{x^2}\,dx$; 4) $\int\limits_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}\,dx$.

12. Знайти перших п'ять членів розкладу у степеневий ряд для частинного розв'язку диференціального рівняння:

1) $y'' + y\cos x = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$;

2) $y'' + y' = x^2 y,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$;

3) $y'' - xy' + y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0$;

4) $y'' - xy' + 2y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 2$.

Лекція 9. Ряди Фур’є та перетворення Фур’є

9.1. Ряд Фур’є за тригонометричною системою функцій.

9.2. Ряд Фур’є для парних і непарних функцій.

9.3. Ряд Фур’є для $2l$ - періодичної функції.

9.4. Інтеграл та перетворення Фур’є.

Задача розвинення функцій в ряд Тейлора вимагає, щоб функція $f(x)$ була нескінченне число раз диференційовною в деякому околі точки $x = x_0$, причому обмеженість похідних всіх порядків є достатніми умовами збіжності ряду Тейлора до функції $f(x)$. Це звужує область застосування степеневих рядів.

У техніці поширені процеси, які через певні проміжки часу повторюються, тобто є періодичними. Прикладами періодичних процесів в поліграфічному процесі можуть бути механічні та електромагнітні коливання, періодичні рухи нанесення фарби [17] тощо. Моделюються періодичні процеси за допомогою періодичних функцій, які практично всі можна розкласти на прості гармоніки, якщо ввести тригонометричні ряди. Тому розглянемо ряд Фур’є, за допомогою якого можна розвивати в ряди неперервні та кусково-неперервні функції.

9.1. Ряд Фур’є за тригонометричною системою функцій

Означення. Функції $f(x)$, $g(x)$ називають *ортогональними* на відрізку $[a, b]$, якщо

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Означення. Скінченну чи нескінченну систему (множину) функцій $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$ називають *ортогональною* на відрізку $[a, b]$, якщо будь-які дві різні функції цієї системи ортогональні на цьому відрізку, тобто справджується співвідношення

$$\int_a^b f_k(x)g_j(x)dx = 0 \text{ для } k \neq j, k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}.$$

Прикладом *ортогональної системи функцій* є тригонометрична система функцій

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots,$$

яка розглядається на проміжку $[-\pi, \quad \pi]$.

Доведення ортогональності вказаної тригонометричної системи функцій проводять обчисленням інтегралів від функцій
$1 \cdot \cos nx$, $1 \cdot \sin nx$, $\cos kx \sin jx$, $\sin kx \sin jx$, $\cos kx \sin kx$, $\cos kx \cos jx, k \neq j$ на проміжку $[-\pi, \quad \pi]$.

Означення. Для періодичної з періодом 2π та інтегровної на проміжку $[-\pi, \quad \pi]$ функції $f(x)$ функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{9.1}$$

називають *тригонометричним рядом Фур'є*, а числа $a_0, a_k, b_k, k \in \mathbb{N}$ – коефіцієнтами цього ряду .

Нехай тригонометричний ряд (9.1) збігається рівномірно на відрізку $[-\pi, \pi]$. Позначимо його суму через $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{9.2}$$

Оскільки члени ряду (9.2) є неперервні функції, а ряд, за припущенням, рівномірно збіжний на відрізку $[-\pi, \pi]$, то його на цьому відрізку можна почленно інтегрувати, тобто

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kxdx\right).$$

Інтеграли

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin kxdx = 0,$$

тому

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{9.3}$$

Помножимо ліву і праву частину рівності (9.2) на $\cos nx$. Дістанемо функціональний ряд

$$f(x)\cos nx = \frac{a_0}{2}\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\cos nx,$$

який рівномірно збігається на відрізку $[-\pi,\ \pi]$. Тоді, почленно інтегруючи попередню рівність, матимемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx\right).$$

У правій частині цієї рівності всі інтеграли, крім інтеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi,$$

дорівнюють нулю (ортогональність тригонометричної системи функцій).

Тому маємо

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, n \in \mathbb{N}. \tag{9.4}$$

Аналогічно, помноживши ліву і праву частину рівності (9.2) на $\sin nx$ і проінтегрувавши на відрізку $[-\pi,\ \pi]$, знайдемо

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, n \in \mathbb{N}. \tag{9.5}$$

Отже, $a_0, a_k, b_k,\ k \in \mathbb{N}$ обчислюють за формулами, які називають *формулами Ейлера-Фур'є*:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx,\ k\in \mathrm{N},\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx,\ k\in \mathbb{N}. \tag{9.6}$$

Числа a_0, a_k, b_k, $k\in\mathbb{N}$, які визначаються формулами (9.6), називають *коефіцієнтами Фур'є* функції $f(x)$.

Розглянемо довільну інтегровну на відрізку $[-\pi,\ \pi]$ функцію $f(x)$. Для такої функції за формулами Ейлера-Фур'є знайдемо коефіцієнти Фур'є і складемо тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx), \tag{9.7}$$

де $a_0, a_k, b_k,\ k\in\mathbb{N}$ – коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

Тригонометричний ряд (9.7) називають рядом Фур'є функції $f(x)$. Отже, кожній інтегровній на відрізку $[-\pi,\ \pi]$ функції відповідає свій ряд Фур'є. Оскільки про збіжність ряду (9.7) нічого не відомо, то замість знака «=» ставлять знак «~», тобто записують

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx). \tag{9.8}$$

Має місце теорема.

Теорема Діріхле ***(достатні умови зображення функції рядом Фур'є)***

Якщо функція $f(x)$ – 2π *– періодична, кусково-монотонна і може мати на інтервалі* $[-\pi,\quad \pi]$ *скінченну кількість розривів 1-го роду , то ряд Фур'є цієї функції збіжний на відрізку* $(-\pi,\quad \pi)$ *до функції* $S(x)$*; при цьому*

а) $S(x) = f(x)$ *у точках неперервності функції* $f(x)$*;*

б) у точці x_0 *розриву 1-го роду функції*: $S(x_0) = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$*;*

в) $S(\pm\pi) = \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ *на кінцях відрізка.*

Зауваження 1. Оскільки члени ряду Фур'є (9.8) є періодичні функції і мають спільний період 2π, то сума цього ряду (якщо він збігається) буде також періодичною з періодом 2π. Отже, щоб ряд Фур'є функції $f(x)$ збігався до цієї ж функції, необхідно, щоб $f(x)$ була періодична з періодом 2π, тобто

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

для всіх $x\in\mathbb{R}$.

Зауваження 2. Якщо $f(x)$ не є періодичною, а визначеною, наприклад, на деякому відрізку $[a,b]\subset[-\pi,\pi]$, то можна побудувати допоміжну інтегровану періодичну функцію $F(x)$ із періодом 2π таку, щоб всередині відрізка $[a,b]$ вона збігалась з функцією $f(x)$. Тоді, якщо ряд Фур'є функції $F(x)$ збігається до цієї ж функції на відрізку $[-\pi,\pi]$, то для $x\epsilon[a,b]$ він збігається до $f(x)$.

Побудова періодичної з періодом 2π функції $\varphi(x)$, яка дорівнює заданій функції $f(x)$ на відрізку $[-\pi,\pi]$ або на деякій його частині у випадку, коли $f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]\subset[-\pi,\pi]$, називається *періодичним продовженням функції* $f(x)$.

9.2. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій

Нехай функцію $f(x)$ можна задати на відрізку $[-\pi,\pi]$ рядом Фур'є. Обчислення коефіцієнтів цього ряду суттєво спрощується, якщо функція $f(x)$ є парною, або непарною.

У випадку, коли функція $f(x)$ парна її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx\,, \tag{9.9}$$

де коефіцієнти обчислюють за формулами

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,\; a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos kxdx,\; b_k=0, k\in\mathbb{N}\,, \tag{9.10}$$

а для непарної функції

$$a_k=0,\quad k=0,1,2,...,b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin kxdx,\quad k\in\mathbb{N}$$

і ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx\,. \tag{9.11}$$

Зауваження. Для доведення формул розвинення в ряд Фур'є парної та непарної функції використовують відомі властивості визначеного інтеграла для парної та непарної інтегровної функції на симетричному проміжку інтегрування відносно початку координат.

9.3. Ряд Фур'є для $2l$ - періодичної функції

Нехай функцію $f(x)$ визначена на відрізку $[-l,l]$, має період $2l$ (l −довільне додатне число), є на цьому відрізку кусково-монотонною і може мати на цьому інтервалі скінченну кількість розривів 1-го роду.

Розкладемо її в ряд Фур'є. Зробимо заміну змінної $x = \frac{lt}{\pi}$ і розглянемо функцію $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$, яка є визначена і кусково-монотонна на відрізку $[-\pi,\pi]$, тому її розклад в ряд Фур'є на цьому відрізку має вигляд

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos kt\,dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin kt\,dt,\ k \in \mathbb{N}.$$

Повернувшись до змінної x, отримують розклад в ряд Фур'є функцію $f(x)$.

Означення. Рядом Фур'є $2l$ - періодичної функції $f(x)$ називається ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{9.12}$$

де коефіцієнти ряду Фур'є визначаються формулами

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{9.13}$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що за умов, накладених на функцію $f(x)$, справджується теорема про достатні умови зображення $2l$ періодичної функції її рядом Фур'є.

Зауваження. У випадку коли $f(x)$ задана на відрізку $[0, l]$ для розвинення в ряд Фур'є потрібно продовжити її на відрізок $[-l, \ 0]$ довільним способом

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \ l], \\ f^*(x), & x \in (-l, 0). \end{cases}$$

Доцільно функцію $f^*(x)$ вибирати так, щоб на відрізку $[-l, \ l]$ виконувалась рівність $F(-x) = F(x)$ (парне продовження функції $f(x)$) або рівність $F(-x) = -F(x)$ (непарне продовження функції $f(x)$). Ряд Фур'є на відрізку $[-l, \ l]$ парної функції $F(x)$ матиме лише члени з косинусами $(b_k = 0)$, а для непарної — із синусами ($a_k = 0$).

Приклади розвинення в ряд Фур'є

Приклад 1. Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = |x|, -\pi \le x \le \pi, \ f(x + 2\pi) = f(x).$$

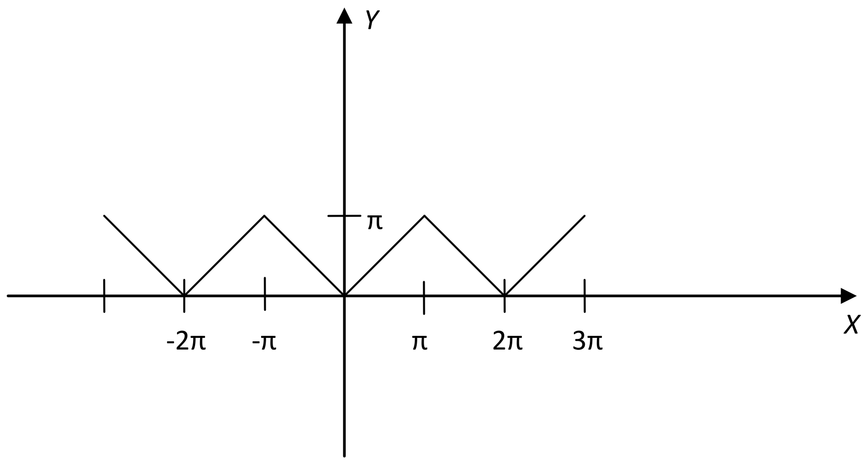

Рис.9.1.Графік 2π -періодичної функції $f(x) = |x|$.

Розв'язування.

Дана функція є періодичною (рис. 9.1) і на відрізку $[-\pi, \ \pi]$ є кусково-диференційовною. Тому вона задовольняє умови теореми Діріхле. Ряд Фур'є збігається на цьому відрізку до функції $f(x) = |x|$, тобто

$$|x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є a_0, a_k, b_k за формулами (9.2):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos kxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos kxdx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k}x\sin kx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kxdx\right] = \frac{2}{\pi k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right],\ k = 1, 2, \ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin kxdx = 0,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Підставимо значення коефіцієнтів. Маємо

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right]\cos kx.$$

Число $\left[(-1)^k - 1\right]$ при $k = 2m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ дорівнює нулю, а при $k = 2m-1$ дорівнює -2.

Тому остаточно

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}, \quad -\pi \le x \le \pi.$$

Зазначимо, що отриманий ряд не містить членів з синусами. Це не випадково, оскільки $f(x) = |x|, -\pi \le x \le \pi$ − парна функція.

Приклад 2. Розвинути в ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = x^2$ в інтервалі $[0, \ \pi]$.

Розв'язування. Продовжимо дану функцію на відрізок $[-\pi, \ 0]$ непарним способом, а потім періодично з періодом 2π на всю дійсну вісь (рис. 9.2).

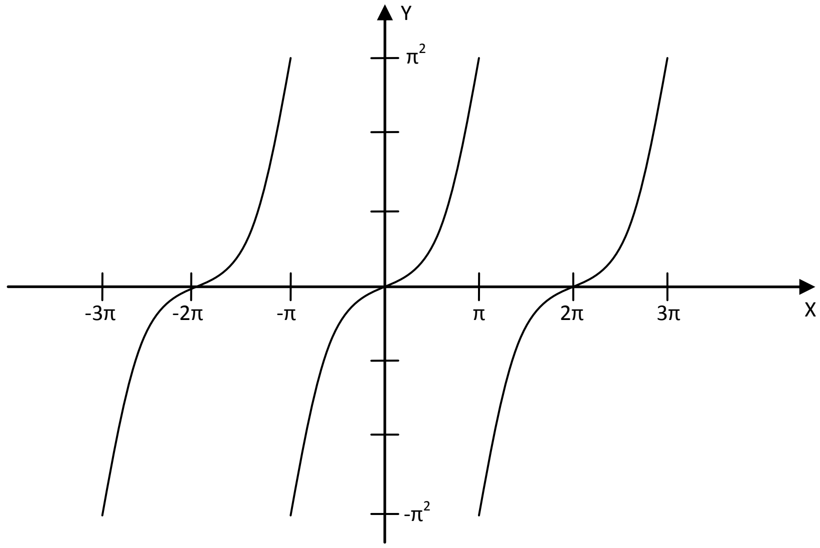

Рис. 9.2. Продовження функції непарним способом.

Визначимо коефіцієнти Фур'є

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2xdx, \\ dv = \sin kxdx, \\ v = \int \sin kxdx = -\frac{1}{k}\cos kx \end{array} \right| = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x^2 \cos kx}{k}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\cos kxdx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi^2 \cos k\pi}{k} + \frac{2}{k}\left| \begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dv = \cos kxdx, \\ v = \frac{1}{k}\sin kx \end{array} \right| \left(\frac{x\sin kx}{k}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{k^2}\cos kx\Bigg|_0^{\pi} \right) \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{\pi^2}{4}(-1)^{k+1} + \frac{2}{k^2}\left[(-1)^k - 1\right] \right\}, \quad a_k = 0.$$

Отже, $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{ \frac{\pi^2}{4}(-1)^{k+1} + \frac{2}{k^2}\left[(-1)^k - 1\right] \right\}\sin kx.$

Приклад 3. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = x^2$ з періодом 2, яка задана в інтервалі $[-1, 1]$.

Розв'язування. Дана функція є парною, тому розклад в ряд Фур'є буде містити тільки косинуси і потрібно обчислити a_{0}, a_k. Оскільки $l = 1$, тоді

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = 2\int_0^1 x^2\cos k\pi x dx,$$

Аналогічно прикладу 2, слід двічі зінтегрувати частинами:

$$a_k = 2\int_0^1 x^2\cos k\pi x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2,\, du = 2xdx, \\ dv = \cos k\pi x dx, \\ v = \int \cos k\pi x dx = \dfrac{1}{k\pi}\sin k\pi x \end{array} \right| = \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{x^2\sin k\pi x}{k}\right|_0^1 - \frac{2}{k}\int_0^1 x\sin k\pi x dx \right] =$$

$$= -\frac{4}{k\pi}\left| \begin{array}{l} u = x,\, du = dx, \\ dv = \sin k\pi x dx, \\ v = -\dfrac{1}{k\pi}\cos k\pi x \end{array} \right| \left(-\left.\frac{x\cos k\pi x}{k\pi}\right|_0^1 + \left.\frac{1}{(k\pi)^2}\sin k\pi x\right|_0^1 \right) = \frac{4}{(k\pi)^2}(-1)^k.$$

Отже,

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos k\pi x.$$

9.4. Інтеграл та перетворення Фур’є

В попередніх пунктах показано, що всяку кусково-монотонну функцію, яка може мати скінченну кількість розривів 1-го роду, визначену на довільному скінченному проміжку, можна розкласти в ряд Фур’є. Виявляється, що можна дістати такий самий розклад на гармоніки чи подібний до нього для неперіодичних функцій, заданих на нескінченному проміжку $(-\infty, \infty)$ за допомогою інтеграла Фур’є.

Якщо функція $f(x)$ абсолютно інтегрована вздовж всієї осі $\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx < \infty\right)$ і кусково-монотонна на довільному скінченному відрізку, то вона зображається у вигляді інтеграла Фур’є (який одержується граничним переходом із ряду Фур’є періодичної з періодом $2l$ функції при $l \to +\infty$):

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\cos z(t-x)dt\right)dz. \qquad (9.14)$$

Записаний інтеграл (9.14) *називається інтегралом Фур'є* для функції $f(x)$, Фур'є дістав його в 1811 р.

Формула (9.14) справедлива для всіх точок x, в яких функція $f(x)$ неперервна. Якщо $x_0 -$ точка розриву функції, то за значення $f(x)$ приймаються значення виразу

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\cos z(t-x)dt\right)dz=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

Для *парної функції* інтеграл Фур'є набирає вигляду

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos zxdz\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos ztdt,$$

а для *непарної функції*

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin\, zxdz\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos ztdt.$$

Зазначимо, що інтеграли Фур'є аналогічні відповідним рядам Фур'є для парних і непарних функцій.

У комплексній формі інтеграл Фур'є можна зобразити у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{iz(t-x)}dt\right)dz=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izx}dz\int_{-\infty}^{+\infty}e^{izt}f(t)dt.$$

З трьома останніми формулами *пов'язані інтегральні перетворення Фур'є:*

1. Перетворення Фур'є загального вигляду:

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{izx}f(x)dx \quad \text{(пряме)},$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izx}F(z)dz \quad (\textit{обернене}).$$

2. Косинус-перетворення Фур'є (для парних функцій):

$$f_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos zx \, dx (\textit{пряме}),$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f_c(z) \cos zx \, dz \ (\textit{обернене}).$$

3. Синус-перетворення Фур'є (для непарних функцій):

$$f_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin zx \, dx (\textit{пряме}),$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f_c(z) \sin zx \, dz \ (\textit{обернене}).$$

Завдання для самоконтролю

1. Довести ортогональність тригонометричної системи функцій на відрізку $[-\pi, \pi]$.
2. Тригонометричний ряд Фур'є, обчислення його коефіцієнтів.
3. Отримати формули обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є для парної та непарної функцій на відрізку $[-\pi, \pi]$.
4. Відмінність розвинення в ряд Фур'є для парної та непарної функцій на відрізку $[-\pi, \pi]$.
5. Пояснити на прикладах розвинення в ряд Фур'є функції, заданої на відрізку $[0, \pi]$.
6. Розвинення в ряд Фур'є $2l$-періодичної функції, формули обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є.
7. Подібність та суттєва відмінність інтеграла Фур'є і ряду Фур'є.
8. Записати інтеграл Фур'є для парної та непарної функцій.
9. Навести приклади використання рядів (інтегралів) Фур'є в поліграфічній технології.

10. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним та непарним способом:

1) $f(x) = e^x$;

2) $f(x) = x^2$;

3) $f(x) = 2^x$;

4) $f(x) = \operatorname{sh} x$;

5) $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, \ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ -1, \ \dfrac{\pi}{2} < x < \pi; \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}, \ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x, \ \dfrac{\pi}{2} < x < \pi; \end{cases}$

7) $f(x) = x^2 + 1$;

8) $f(x) = e^{4x/3}$.

Додатки

Додаток 1

Завдання для розрахункової роботи

Елементи теорії поля (частина I)

Варіант 1

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int_L (x^2+y^2)ds; \quad L-$ коло $x^2+y^2=4.$

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy,$ де L – дуга параболи $y=x^2$ від точки $A(-1,1)$ до точки $B(1,1)$.

3. Обчислити масу дуги кривої $y=\ln x$ між точками з абсцисами $x=\sqrt{3}$ і $x=\sqrt{8}$, якщо густина дуги в кожній її точці дорівнює квадрату абсциси цієї точки.

4. За допомогою формули Гріна обчислити $\oint_L \left(-x^2y\right)ydx+xy^2dy,$ де L: $x^2+y^2=25-$ коло, яке пробігається проти руху годинникової стрілки.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні σ, де σ – частина площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами: $\iint_\sigma \left(2x+3y+2z\right)d\sigma, \quad (p): x+3y+z=3.$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_\sigma \left(x^2+y^2\right)zdxdy,$ де σ – зовнішня сторона нижньої половини сфери $x^2+y^2+z^2=9$.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M)=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}, \ (p): \quad x+3y+z=3.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)=(x,y,z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n}=\left(A,B,C\right)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M)=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}, \ (p): \quad 2x+y+2z=2.$$

9. Задана функція $u(M)=x^2y+y^2z+z^2x$ і точки $M_1(1,-1,2)$, $M_2(3,4,-1)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{grad}}\,u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M)=(yz-2x)\vec{i}+(xz+zy)\vec{j}+xy\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x,y,z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M)=x^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ в точці $M_0(0,1,-2)$.

Варіант 2

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \frac{ds}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$; $L-$ відрізок прямої між точками $O\,(0{,}0)$ і $B\,(2{,}2)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L \frac{x^2dy-y^2dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}$; $L-$ дуга астроїди $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t$ від точки $A\,(2,\,0)$ до точки $B\,(0,\,2)$.

3. Довести, що даний вираз

$$\left(\frac{y}{x}+\ln y+2x\right)dx+\left(\frac{x}{y}+\ln x+1\right)dy$$

є повним диференціалом функції $u(x,y)$ та знайти цю функцію.

4. За допомогою формули Гріна обчислити $\oint\limits_L \left(-x^2y\right)ydx+xy^2dy,$ де L: $x^2+y^2=1-$ коло, яке пробігається проти руху годинникової стрілки.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні σ, де σ – частина площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами: $\iint\limits_\sigma (2+y-7x+9z)\,d\sigma,\quad (p): 2x-y-2z=-2.$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_\sigma z^2dxdy,$ де σ – зовнішня сторона поверхні еліпсоїда $x^2+y^2+2z^2=2.$

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M)=(3x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k},\ (p):\quad 2x-y-2z=2.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)=(x,\,y,\,z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x-y)\vec{k}, \ (p): \quad 3x + 2y + z = 6.$$

9. Задана функція $u(M) = x^3 + xy^2 - 6xyz$ і точки $M_1(1, 3, -5)$, $M_2(4, 2, -2)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = xy\vec{i} + (yz + xz)\vec{j} + xz\vec{k}$ в точці $M_0(2, 0, 3)$.

Варіант 3

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{L_{AB}} \dfrac{ds}{\sqrt{5}(x-y)}$; L_{AB} – відрізок прямої між точками $A(0,4)$ і $B(4,0)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{L} (x+y)dx - (x-y)dy$; $L = OAB$ – ламана, яка з'єднує точки $O(0, 0), A(2, 0)$, $B(4, 5)$

3. Знайти масу кривої $x = at,\ y = \dfrac{a}{2}t^2,\ z = \dfrac{a}{3}t^3 \quad (0 \le t \le 1)$, густина якої змінюється за законом $\rho = \sqrt{\dfrac{2y}{a}}$.

4. Обчислити роботу сили $\vec{F} = xy\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по прямій $y = x$ від точки (0,0) до точки (1,1).

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні σ, де σ – частина площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами: $\iint\limits_{\sigma} (6x + y + 4z)d\sigma, \quad (p): 3x + 3y + z = 3.$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma} zdxdy + ydxdz + xdydz,$ де σ – зовнішня сторона поверхні куба, обмеженого площинами $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1.$

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M) = x\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+z)\vec{k}, \ (p): \quad 3x+3y+z=3.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)=(x, y, z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n}=(A, B, C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M) = (y+z)\vec{i} + x\vec{j} + (y-2z)\vec{k}, \ (p): \quad 2x+2y+z=2.$$

9. Задана функція $u(M) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$ і точки $M_1(-1,1,1)$, $M_2(2,3,4)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\mathrm{qrad}}\, u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M) = 6xy\vec{i} + (3x^2-2y)\vec{j} + z\vec{k}$.У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x, y, z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M) = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} - x^2\vec{k}, \ M_0(1, -2, 0)$.

Варіант 4

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \frac{yds}{\sqrt{x^2+y^2}}$; L – дуга кардіоїди $\rho = 2(1+\cos\varphi), 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L (x^2-y)dx - (x-y^2)dy$; L – дуга кола $x = 5\cos t, y = 5\sin t$ від точки $A(5, 0)$ до точки $B(0,5)$ (рух вважати проти руху годинникової стрілки).

3. Знайти координати центра мас чверті однорідного кола $x^2+y^2=a^2$, яка лежить в першому квадранті.

4. Довести, що даний вираз $(2x-3y^2+1)dx + (2-6xy)dy$ є повним диференціалом функції $u(x, y)$ та знайти цю функцію.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні σ, де $\sigma-$ частина площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами: $\iint\limits_\sigma (x+2y+3z)d\sigma, \quad (p): x+y+z=2.$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma}(z+1)dxdy$, де σ – зовнішня сторона поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=16$.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k},\ (p):\quad x+y+z=2.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)=(x,y,z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною (p): $Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n}=(A,B,C)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+y\vec{k},\ (p):\quad x+3y+2z=6.$$

9. Задана функція $u(M)=\ln\left(1+x^2-y^2+z^2\right)$ і точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(5,-4,8)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\,u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M)=(2x-yz)\vec{i}+(2x-xy)\vec{j}+yz\vec{k}$.У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x,y,z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M)=xz\vec{i}+z\vec{j}+yz\vec{k},\ M_0(3,0,1)$.

Варіант 5

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L(x^2+y^2+z^2)ds;\quad L$ – дуга кривої $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=\sqrt{3}t,\ 0\le t\le 2\pi.$

2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\oint\limits_L\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2};\quad L$ – контур трикутника ABC з вершинами в точках $A(1,0),B(1,1),C(0,1)$ (рух вважати проти руху годинникової стрілки).

3. Обчислити моменти інерції відносно осей координат відрізка однорідної прямої $2x+y=1$, який відтинається цими осями.

4. Довести, що даний вираз $(ye^{xy}+y^2)dx+(xe^{xy}+2xy)dy$ є повним диференціалом функції $u(x,y)$ та знайти цю функцію.

5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні σ, де σ – частина площини *(p)*, яка відтинається координатними площинами: $\iint\limits_{\sigma}\left(3x-2y+6z\right)d\sigma, \quad (p): 2x+y+2z=2.$

6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma} yzdydz+xzdxdz+xydxdy,$ де σ – верхня сторона площини $x+y+z=4,$ що відтинається координатними площинами.

7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського), якщо

$$\vec{a}(M)=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k},\ (p):\quad 2x+y+2z=2.$$

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)=(x,y,z)$ по контуру трикутника, який утворений перетином площиною $(p):\ Ax+By+Cz=D$ з координатними площинами в додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n}=\left(A,B,C\right)$ двома способами: а) за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса, якщо

$$\vec{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(x+6y)\vec{j}+y\vec{k},\ (p):\quad x+2y+2z=2.$$

9. Задана функція $u(M)=10\big/\left(x^2+y^2+z^2+1\right)$ і точки $M_1(-1,2,-2)$, $M_2(2,0,1)$. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\overrightarrow{\text{qrad}}\,u(M_1)$.

10. Визначити потенціальність та соленоїдальність векторного поля $\vec{a}(M)=(y-z)\vec{i}+3xyz\vec{j}+(z-x)\vec{k}$.У випадку потенціальності поля знайти його потенціал $u(x,y,z)$.

11. Знайти найбільшу щільність циркуляції векторного поля $\vec{a}(M)=xy\vec{i}+xyz\vec{j}-x\vec{k},\ M_0(-1,0,3)$.

Варіант 1

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n+3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10n}{9n+4}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{\ln n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{9n^3+10n+7}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{9n^2+4}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(n+3)!}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(5n)!\,x^n}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції:

а) $\ln 1{,}22, \quad \alpha=0{,}0001$; б) $\cos 0{,}3, \quad \alpha=0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,1}e^{-6x^2}dx$ з точністю до $\alpha=0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння $y'=\arcsin y+x;\quad y(0)=\frac{1}{2},\quad k=4.$

7. Розкласти в ряд Фур’є періодичну (з періодом $\omega=2\pi$) функцію $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x-1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$, задану на відрізку $[-\pi,\pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур’є функцію $f(x)=e^x$, задану на інтервалі $(0,\pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 2

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^2$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції:

а) $\sin\left(\pi/5\right)$, $\alpha = 0{,}0001$; б) $\ln 2$, $\alpha = 0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}\,dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = x^2 y^2 + y\sin x$; $y(0) = \dfrac{1}{2}$, $k = 3$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 2 - 2x/7, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = 3^x$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 3

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{n-1}}{(n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{n+4}{n+3}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2}{(n+1)(n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\dfrac{\pi}{3^n}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{n(n+1)} x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{\ln^n (n+1)}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $\alpha = 0{,}0001$; б) $\sin 10^\circ$, $\alpha = 0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int_0^{2,5} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{625 + x^4}}$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = y\cos x + 2\cos y$; $y(0) = 0$, $k = 4$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 7x + 3, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = 5^{x/2}$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 4

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{e^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-1)^n}{(2n)^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \dfrac{1}{(n+1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n-1}{9n+4}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n x^n}{\sqrt{2^n (3n-1)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{4^n x^{2n}}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{136}}$, $\alpha = 0{,}001$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $\alpha = 0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,4} \sqrt{1-x^3}\,dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку задану на відрізку $[-\pi, \pi]$ диференціального рівняння $y' = x\sin x - y^2$; $y(0) = 1$, $k = 3$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію

$f(x) = \begin{cases} 4x - 10, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = (x-2)^2$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Варіант 5

1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{7n^2+4}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2 - 1}$.

2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність дані знакопереміжні ряди:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt{\dfrac{n+2}{n^2-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^5}{4^n}$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n\cdot 4^{n-1}}$.

4. Обчислити вказану величину наближено з точністю до α, використовуючи відповідним чином підібрані функції:

а) $\sin\dfrac{\pi}{100}$, $\alpha = 0{,}0001$; б) $\sqrt[4]{90}$, $\alpha = 0{,}001$.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{x - arctgx}{x^2}dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

6. Знайти k членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' = xyy'$; $y(0) = y'(0) = 1$, $k = 4$.

7. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega = 2\pi$) функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 1 - 2x/5, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$ задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

8. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = (2x-1)^2$, задану на інтервалі $(0, \pi)$, продовживши її парним або непарним способом.

Додаток 2

Довідниковий матеріал

Додаток 2.1

Елементи лінійної алгебри

Визначники

другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

або

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Правила Крамера для системи $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \text{де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix},$$

за умови, що $\Delta \neq 0$.

Матричний спосіб (для системи 3-го порядку) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$

$X = A^{-1}B$, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Додаток 2.2

Елементи векторної алгебри

Модуль вектора: $\vec{a}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $|\vec{a}|=\sqrt{x_0^{\ 2}+\ y_0^{\ 2}+z_0^{\ 2}}$.

Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $B(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\overrightarrow{AB}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0)$.

Умова колінеарності векторів: $\vec{a}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $\vec{b}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\dfrac{x_0}{x_1}=\dfrac{y_0}{y_1}=\dfrac{z_0}{z_1}$.

Скалярний добуток :

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,\quad \vec{a}\vec{b}=x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1,\ \cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів: $\vec{a}\vec{b}=0$, $x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1=0$.

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$: $np_{\bar{b}}\bar{a}=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$.

Векторний добуток: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}=(y_0\,z_1-y_1\,z_0)\,\vec{i}-(x_0\,z_1-x_1\,z_0)\,\vec{j}+(x_0\,y_1-x_1\,y_0)\,\vec{k}$.

Площа паралелограма, трикутника, побудованих на векторах

$\vec{a},\vec{b}$: $S_{пар}=|\vec{a}\times\vec{b}|$, $S_{тр}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Мішаний добуток: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$.

Об’єм паралелепіпеда і піраміди: $V_{пар}=|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$, $V_{пір}=\dfrac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$.

Додаток 2.3

Аналітична геометрія на площині

Пряма на площині

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0) \perp$ до вектора $\vec{N}(A, B)$:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$. Загальне рівняння прямої: $Ax+By+C=0$. Кут φ між двома прямими, які задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ і

$A_2x+B_2y+C_2=0$: $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$.

Параметричні рівняння прямої: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}$

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k:

$y-y_0=k(x-x_0)$.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k: $y=kx+b$. Для прямих $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ тангенс кута між ними через їх кутові коефіцієнти обчислюють за формулою $\mathrm{tg}\alpha = \left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Прямі перпендикулярні: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Відстань від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Криві 2-го порядку

Рівняння кола з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіуса R: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Рівняння еліпса з центром в точці $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Рівняння гіперболи з центром в точці $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1, \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm1.$$

Рівняння параболи з вершиною $O(0,0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$y^2=2px, \quad x^2=2py; \quad (y-y_0)^2=2p(x-x_0), \quad (x-x_0)^2=2p(y-y_0).$$

Додаток 2.4

Аналітична геометрія в просторі

Пряма в просторі

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Кут між двома прямими $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$:

$$\cos\varphi=\frac{m_1 m_2+n_1 n_2+p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Умова паралельності двох прямих: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_2}{p_2}$,

умова перпендикулярності: $m_1 m_2+n_1 n_2+p_1 p_2=0.$

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

Параметричні рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$: $x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt$.

Загальні рівняння прямої: $\begin{cases} A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0, \\ A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0 \end{cases}$.

Площина в просторі

Рівняння площини через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\perp$ до вектора $\vec{N}(A, B, C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Рівняння площини у відрізках на осях: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Загальне рівняння площини: $Ax+By+Cz+D=0$.

Рівняння площини через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

Кут між площинами: $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{N_1}\,\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}$, $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Відстань від точки $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$до площини $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пряма і площина в просторі

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$:

$$\sin\varphi = \frac{\left|Am+Bn+Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Умова паралельності прямої і площини: $Am+Bn+Cp=0$, а умова перпендикулярності $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

Поверхні 2-го порядку

Сфера: $x^2+y^2+z^2=R^2$, *еліпсоїд:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Циліндри 2-го порядку: круговий $x^2+y^2=R^2$; еліптичний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; параболічний $y^2=2px$.

Конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

*Гіперболоїди:*однопорожнинний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, двопорожнинний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

Параболоїд: еліптичний $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$.

Додаток 2.5

Функція однієї змінної

Дві важливі границі: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1\pm x\right)^{\pm\frac{1}{x}}=e.$

Основні еквівалентні величини:

$\sin x\sim x,\quad x\to 0$; $\ln(1+x)\sim x,\ \log_a(1+x)\sim(\log_a e)x,\ x\to 0$; $e^x-1\sim x,\ a^x-1\sim x\ln a,\ x\to 0;$

$\arcsin x\sim x,\ x\to 0$; $\mathrm{tg}x\sim x,\ x\to 0$; $\mathrm{arctg}x\sim x,\ x\to 0$; $(1+x)^{\mu}-1\sim \mu x,\ x\to 0.$

Рівняння дотичної і нормалі

$y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right),\qquad y-y_0=-\dfrac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right).\ \ k=\mathrm{tg}\alpha=f'(x_0).$

Екстремуми функцій

Точки, в яких $f'(x_o)=0$ – критичні точки функції. Якщо похідна змінює знак з + на - , то точка x_0 – точка максимума, якщо з - на +, то точка мінімума.

Значення функцій деяких кутів

$\sin 0=0,\quad \sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2},\quad \sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\dfrac{\pi}{2}=1,\quad \sin\pi=0,\quad \sin\dfrac{3\pi}{2}=-1;$

$\cos 0=1,\quad \cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2},\quad \cos\dfrac{\pi}{2}=0,\quad \cos\pi=-1,\quad \cos\dfrac{3\pi}{2}=0;$

$\mathrm{tg}\,0=0,\quad \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\quad \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}=1,\quad \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3},\quad \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2}$ – не існує;

$\mathrm{ctg}\,0$ – не існує, $\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3},\quad \mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{4}=1,\quad \mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\quad \mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{2}=0.$

Додаток 2.6

Табличне диференціювання

I. Таблиця похідних основних функцій

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}.$

2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$

3. $(\sin x)' = \cos x.$

4. $(\cos x)' = -\sin x.$

5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$

8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$

9. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

10. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

11. $(a^x)' = a^x \ln a.$

12. $(e^x)' = e^x.$

13. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0).$

14. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x} \quad (x > 0,\ a > 0).$

15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$

16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$

17. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$

18. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

II. Основні правила обчислення похідної. Якщо $C-$ стала величина і $u = \varphi(x), v = \psi(x)$ $-$ диференційовані функції, тоді

1) $(C)' = 0,$

2) $(x)' = 1,$

3) $(u \pm v)' = u' \pm v',$

4) $(Cu)' = Cu',$

5) $(uv)' = u'v + uv',$

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0),$

7) $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$

III. Правило диференціювання складеної функції. Якщо $y = f(u), u = \varphi(x),$ тобто $y = f\left[\varphi(x)\right],$ де функції y і u мають похідні, тоді

$$y_x' = y_u' \cdot u_x'$$

або в інших позначеннях $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}.$

Додаток 2.7

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \left(\int dx = x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \right).$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

8. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$

13. $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C.$

14. $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C.$

15. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C.$

16. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$

20. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

21. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

22. $\int \sqrt{x^2 + a}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

Формула Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі: $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$

Додаток 2.8

Функція багатьох змінних. Диференціальні рівняння

Функція багатьох змінних

$z_x{}' = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ $-$ похідна за змінною $x,\ y$ $-$ стала;

$z_y{}' = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ $-$ похідна за змінною $y,\ x$ $-$ стала.

$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ $-$ похідна 2-го порядку за змінною x ;

$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ $-$ похідна 2-го порядку за змінною y;

$z''_{xy} = \left(z'_y\right)'_x = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ $-$ мішана похідна 2-го порядку за змінними $x,\ y$.

Диференціальні рівняння

Диференціальні рівняння 1-го порядку:

З відокремлюваними змінними**:** $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$, розв’язок $\int \dfrac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \dfrac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$

Лінійне неоднорідне $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$; $y = uv, \quad y' = u'v + uv'$ $-$метод Бернуллі.

Диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами (однорідні): $y'' + py' + qy = 0$**.**

Характеристичне рівняння $k^2 + pk + q = 0$ та загальний розв’язок рівняння в залежності від коренів:

1**)** дійсні $k_1 \neq k_2$: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

2) $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta : y = e^{\alpha x}(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x)$**;**

3) $k_1 = k_2 = k : y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$**.**

Список літератури

Список використаної літератури

1. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / Дубовик В. П., Юрик І. І. – К.: А.С.К., 2005. – 648с.
2. Дубовик В. П. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб. / Дубовик В. П., Юрик І. І. – К.: А.С.К., 2005. – 648с.
3. Грималюк В. П. Вища математика: У 2 ч.: навч. посіб. / Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. – К.: Віпол, 2004. – Ч. 1. – 376с.
4. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие. – 22-е изд., перераб. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2005. – 432с.
5. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы, ряды /Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М., Наука, 1988. – 425с.
6. Шкіль М. І. Математичний аналіз / М.І. Шкіль. Ч.2. – Київ, 1981. – 465 с.
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления (т.2). М.: Наука, 1996. – 416с.
8. Лаптев Г. Ф. Элементы векторного исчисления: учебник для студентов втузов. – Москва, Наука, 1975. –336с.
9. Денисюк В. П. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4част. / В. П. Денисюк, В. К. Репета. – Ч. 1. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 296с.
10. Кушлик-Дивульська О.І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс]: збірник типових завдань кредитного модуля «Вища математика-1» для студентів видавничо-поліграфічного інституту / НТУУ «КПІ» ; уклад. О. І. Кушлик-Дивульська, Н.В. Поліщук, Н. П. Селезньова. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,67 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 149 с. – Назва з екрана. – Доступ : http://ela.kpi.ua/handle/123456789/10429.
11. Кушлик-Дивульська О. І. Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи кредитного модуля "Інтегральне числення функції однієї змінної.

Диференціальні рівняння" для напрямів підготовки 6.051501 "Видавничо-поліграфічна справа", 6.050503 "Машинобудування" для студентів Видавничо-поліграфічного інституту [Електронний ресурс] / НТУУ "КПІ"; Уклад. О. І. Кушлик-Дивульська. − Електронні текстові дані (1 файл: 2,64 Мбайт). − Київ: НТУУ "КПІ", 2013. − 117с. − Назва з екрана. − Доступ http://ela.kpi.ua/handle/123456789/2838.

12. Кушлик-Дивульська О. І. Конспект лекцій кредитного модуля «Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння» (Вища математика-2) для напряму підготовки 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа» [Електронний ресурс] / НТУУ «КПІ» ; уклад. О. І. Кушлик-Дивульська. − Електронні текстові данні (1 файл: 3,68 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 241 с. – Назва з екрана. – Доступ : http://ela.kpi.ua/handle/123456789/12700

13. Кулик Г. М. Вища математика: Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей / Г. М. Кулик, О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Степаненко, Н. П. Ярема: НТУУ "КПІ". - Електронні текстові дані (1файл: 5,04 Мбайт). − К.: НТУУ "КПІ". 2016.- 278с. – Назва з екрана. – Доступ : http://ela.kpi.ua/handle/123456789/16444.

14. Кушлик-Дивульська О. І. Елементи лінійної, векторної алгебри. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу [Електронний ресурс] : навчальний посібник [для студентів Видавничо-поліграфічного інституту спеціальності 186 «Видавництво та поліграфія»] / О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук ; відп. ред. С. Д. Івасишен; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,15 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 141 с. – Назва з екрана. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/19572

15. Регей І. І. Наукові основи розроблення енергоощадної технології і засобів виготовлення розгорток картонного паковання: автореф. дисертації на здобуття наукового ступеня докт. техн.. наук./ І. І. Регей . – Львів, 2007 − заголовок з екрану «http//referatu.com.ua/referats/7569/173161».

16. Стахів І.І., Рак Ю. П., Проць Я. І. Моделі аркушетранспортуючих систем у гнучких автоматизованих технологічних лініях поліграфії / заголовок з екрану «www.nbul.gov.ua/portal/natural/nn/2002_2009/statti/vup20/20-2/39.pdf».

17. Ткаченко Д. С. Иллюстрационный материал.1. Применение ряда Фурье для аппроксимации изображений: МИФИ. каф. Высшей математики/ заголовок з екрану «http//tkachenko_mephi.narod.ru/pdfs/ia.pdf».

18. Поліщук Н. В. Моделювання засобами векторної алгебри і теорії поля поліграфічних процесів: конспект лекцій для студентів напряму підготовки 8.05150102, 8.05150103, 8.05150104 «Технології електронних мультимедійних видань», «Комп'ютерні технології та системи видавничо-поліграфічних виробництв», «Матеріали видавничо-поліграфічних виробництв» Видавничо-поліграфічного інституту / Н. В. Поліщук; НТТУ «КПІ», 2013.− 82 с. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/4931

Список рекомендованої літератури

1. Шкіль М. І. Вища математика: підручник у 3-х книгах. Кн.1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – Київ, Либідь, 1994. – 280с.

2. Шкіль М. І. Вища математика: підручник у 3-х книгах. Кн.2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – Київ, Либідь, 1994. – 352с.

3. Коваленко І. П. Вища математика: навч. посіб. для студентів ВНЗ.– Київ, Вища школа, 2006. – 343с.

4. Лавренчук В. П. Вища математика. Загальний курс. Ч. 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. / В. П. Лавренчук, О. Р. Мартинюк, О. С. Кондур. – Чернівці, Книга – XXI , 2010. – 319с.

5. Лаптев Г.Ф. Элементы векторного исчисления: учебник для студентов втузов. – Москва, Наука, 1975. –336с.

6. Вища математика: Збірник задач у 2-х частинах. Ч. 1. Лінійна і векторна алгебра, аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу.

Диференціальне та інтегральне числення. За ред. П. П. Овчинникова. – Київ, Техніка, 2004. – 279с.

7. Дюженкова Л. І. Вища математика: приклади і задачі: навч. посіб./ Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Міхалін. – Київ, Академія, 2002. – 624с.

8. Дюженкова Л. І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2-х частинах. Ч. 1. Навч. посіб./ Л.І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін. – Київ, Вища школа, 2002. – Ч. 1. – 462с.

9. Шунда Н. М. Практикум з математичного аналізу: навч. посіб. / Н. М. Шунда, А. А. Томусяк. – Київ, Вища школа, 1993. – 375с.

10. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х частях. Ч.1. Учеб. пос. Для студ. втузов./ П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980. – Ч. 1. – 320с.

11. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математичного анализа: учеб. пособие для втузов. / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов и др. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. – Ч. 1. – 464с.

12. Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики. / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – М, Наука, 1989. – 656с.

13. Головина Л. И. Линейная алгебра и некотрые ее приложения. М.: Наука, 1985. – 392с.